

2.1 Teilprojekt 8

Thema

Analytische Modellrechnungen

Leiter

Prof. Dr. Ulrich Eckern, Priv.-Doz. Dr. Karl-Heinz Höck

Beteiligte Wissenschaftler

Priv.-Doz. Dr. Michael Dzierzawa

Dr. Cosima Schuster

Dr. Peter Schwab

Prof. Dr. Youquan Li (AvH-Stipendiat)

Prof. Dr. Yupeng Wang (AvH-Stipendiat)

Zusammenfassung

Ausgehend von den Arbeiten in der ersten Förderperiode wurden quasi-exakte Ergebnisse für niedrigdimensionale Modelle gewonnen. Dabei stand die Untersuchung von Metall-Isolator-Übergängen in stark korrelierten eindimensionalen Fermisystemen unter dem Einfluss von periodischen *und* zufälligen Störungen des Kristallgitters im Vordergrund. Die betrachteten Größen waren Tieftemperatureigenschaften wie Drude-Gewicht, Energielücke und Friedel-Oszillationen. Einzelne Störstellen schwächen den Einfluss einer gegebenen Dimerisierung ab, ohne jedoch den Dimer-Grundzustand zu zerstören. Sowohl die (stabile) Verzerrung des Gitters als auch die zugehörige Energielücke verringern sich durch das Einfügen der Störstelle. Im Fall eines weichen Gitters wird der Übergang vom lokalisierten Dimer-Zustand zu einer ausgedehnten Grundzustandswellenfunktion, wie er im dimerisierten System auftritt, durch die Störstelle zu (betragsmäßig) schwächeren, aber immer noch attraktiven Wechselwirkungen verschoben. Der Abfall der Friedel-Oszillationen (lokale Dichte-Oszillationen rund um eine Störstelle) in einer dimerisierten Kette ist – wie für ein System mit Energielücke zu erwarten – exponentiell.

Im weiteren betrachteten wir schwach-ungeordnete quasi-eindimensionale Systeme. In einem ersten Projekt untersuchten wir Auswirkungen einer Wechselwirkung der Leitungselektronen mit Defekten, welche als Zwei-Niveau-Systeme angesehen wurden. Eine derartige Wechselwirkung verursacht sowohl eine Dekohärenz der Quasi-Teilchen als auch Quantenkorrekturen zur Thermodynamik. Als Folge davon treten zum Beispiel in mesoskopischen Ringen Dauerströme auf. Für ein Ensemble von Ringen wird der Dauerstrom durch derartige Defekte erhöht.

Außerdem berechneten wir die Strom-Spannungs-Kennlinie eines mesoskopischen Drahtes, wobei wir für einen Draht in der Nähe des lokalen Gleichgewichts und im Nichtgleichgewicht signifikante Unterschiede fanden.

Ergebnisse

Dimerisierte Kette

Gegenstand umfangreicher Untersuchungen war das Modell spinloser Fermionen (Teilchenzahl: N_f , Zahl der Gitterplätze: N , Teilchendichte: $n_0 = N_f/N$),

$$H = - \sum_i t_i (c_i^\dagger c_{i+1} + \text{h.c.}) + \sum_i V_i n_i n_{i+1} . \quad (1)$$

Dieses Modell ist integrabel; im Bereich $-2t < V \leq 2t$ entsprechen die niedrigliegenden Anregungen denen einer Luttinger-Flüssigkeit, für $V > 2t$ bildet sich bei halber Füllung eine Ladungsdichtewelle und für $V \leq -2t$ ein phasenseparierter Grundzustand aus. Mittels der Jordan-Wigner-Transformation läßt sich das Fermionen-Modell auf das anisotrope Heisenberg-Modell abbilden. Das Modell wurde für die zu behandelnden Fragestellungen wie folgt erweitert: (i) Statische Unordnung (Defekte) werden durch einen Beitrag $\sum_i \epsilon_i n_i$ berücksichtigt, wobei die ϵ_i voneinander unabhängige, zufällige lokale Energien darstellen. (ii) Die Ankopplung an statische Gitterverzerrungen $u_i = u \cos(2k_F x_i)$ ist sowohl im Hopping $t_i = t(1 + u_i)$ als auch in der Wechselwirkung $V_i = V(1 + u_i)$ zu berücksichtigen. Die Energie, die zum Verzerren des Gitters benötigt wird, wird durch $NKu^2/2$ genähert. Im folgenden wird die Energieskala durch $t = 1$ festgesetzt. Eine wesentliche Größe ist die Phasensensitivität, d.h. die Änderung der Grundzustandsenergie bei Änderung der Randbedingungen (von periodisch nach anti-periodisch), ΔE bzw. das Drude-Gewicht $D \sim N\Delta E$. Im metallischen Bereich (ausgedehnte Grundzustandswellenfunktion) ist D unabhängig von der Systemgröße N , während es im isolierenden Bereich (lokalisierte Grundzustandswellenfunktion) exponentiell abfällt. Aus letzterem läßt sich die (bzw. eine) Lokalisierungslänge ξ durch Vergleich verschieden großer Systeme ablesen. Eine weitere wichtige Größe ist die Energielücke Δ_0 als Funktion der Parameter u , ϵ_i und V . Numerisch wird die Energielücke durch die Extrapolation der Energielücke im endlichen System zu großen N bestimmt, $\Delta(N) = E(N_f + 1, N) + E(N_f - 1, N) - 2E(N_f, N) = \Delta_0 + a \exp(bN^{-1})/N$. Benutzt wurde bei den numerischen Untersuchungen die Dichtematrix-Renormierungsgruppen-Methode (DMRG) [1], die für derartige Berechnungen sehr gut geeignet ist. Zur Interpretation der numerischen Daten wurden analytische Rechnungen auf Grundlage der Bosonisierungstechnik [2] bei kleinen Störungen als Vergleich herangezogen. In der ersten Förderperiode wurden bereits die Phasendiagramme *Unordnung – Wechselwirkung* und *Dimerisierung – Wechselwirkung* bestimmt. Die Untersuchung im Rahmen der zweiten Förderperiode widmete sich dem Einfluss

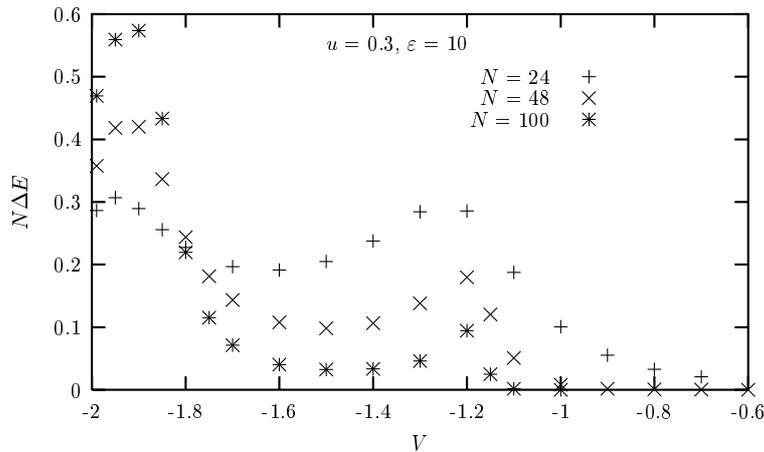


Abbildung 8. 1: Phasensensitivität als Funktion der Wechselwirkung für eine stark dimerisierte Kette, $u = 0.3$, mit einer hohen Barriere, $\varepsilon_1 = 10t$. Es werden die Systemlängen $N = 24, 48$ und 100 verglichen.

einzelner Störstellen in einer dimerisierten Spinkette [3]. Bei Vernachlässigung des Gitteranteils kann die Dimerisierung als externes Potential angesehen werden. In diesem Fall zeigte sich, dass sich der delokalisierte Bereich im Phasendiagramm *Dimerisierung – Wechselwirkung* durch eine Kombination von schwachen bis mittelstarken Störungen vergrößert. Bei einer starken Barriere und starker Gitterverzerrung zeigt sich zusätzlich im lokalisierten Bereich für kleine Systeme bei mittleren Wechselwirkungsstärken ein deutliches Maximum in der Phasensensitivität [4]. Ein typisches Beispiel für dieses Verhalten ist in Abbildung 8. 1 gezeigt. Für repulsive Wechselwirkung, welche bei Spin-Systemen einer antiferromagnetischen Kopplung entspricht, reduziert bereits eine Störstelle deutlich den Energiegewinn der Fermionen durch die Dimerisierung und verschiebt dadurch das Minimum der Gesamtenergie (Fermionen und Gitter) zu kleineren u . Die Energielücke wird ebenfalls reduziert, so dass der dimerisierte Grundzustand immer stärker unterdrückt wird.

Im Vergleich zu den Potentialstörstellen wurden Störstellen betrachtet, die zwei benachbarte Bindungen abschwächen, $t_i = t_i(u)(1 - \delta_{i,n}b - \delta_{i,n+1}b)$ für eine Störstelle am Platz n . Diese Art von Störstelle verletzt im Gegensatz zu den oben vorgestellten Potentialstörstellen nicht mehr die lokale Platzparität, sondern nur die Bindungparität [5]. Dadurch verändert sich das kritische Verhalten völlig. Sowohl in der dimerisierten als auch in der nicht-dimerisierten Heisenberg-Kette sind diese Störstellen irrelevant im gesamten Parameter-Bereich. Allerdings zeigt sich – ohne dass Lokalisierung auftritt – eine sehr starke Unterdrückung der Phasensensitivität nahe des Phasenübergangs erster Ordnung bei $V = -2$. Starke Störstellen, $b \rightarrow 1$, führen – wieder ist u als externes Potential zu sehen – zu einer Vergrößerung des delokalisierten Bereich im Phasendiagramm des dimerisierten Modells [7]. Ein Vergleich zwischen dem Verhalten bei $b = 0$ und $b = 0.7$

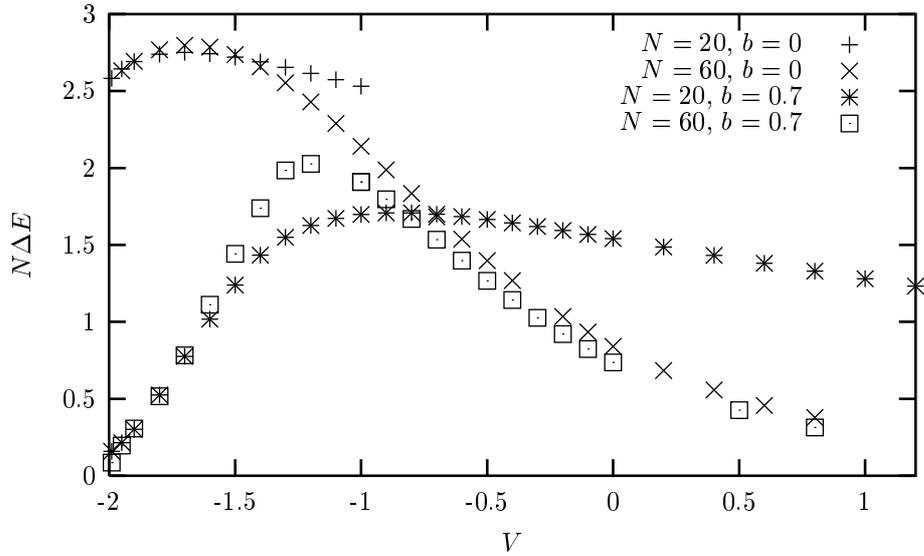


Abbildung 8. 2: Phasensensitivität als Funktion der Wechselwirkung für dimerisierte Ketten mit $u = 0.03$. Es werden jeweils Systeme mit $N = 20$ und $N = 60$ verglichen. Die Verschiebung des Übergangs von der lokalisierten Phase zu der metallischen ist deutlich zu sehen.

ist in Abbildung 8. 2 zu sehen. Neben Phasensensitivität und Energielücke wurden als weitere Grundzustandseigenschaft die Friedel-Oszillationen bestimmt. Der Abfall der Dichte-Oszillationen (Friedel-Oszillationen) wurde bereits in früheren Untersuchungen [6] für die nicht-dimerisierte (translationsinvariante) Kette berechnet. Die Friedel-Oszillationen zerfallen in diesen Systemen algebraisch mit einem wechselwirkungsabhängigen Exponenten. Dieser ist in guter Übereinstimmung mit Resultaten, die mit Hilfe der konformen Feldtheorie gewonnen wurden. Im dimerisierten System hingegen ist der Zerfall – wie für ein System mit Energielücke erwartet – exponentiell, $|\langle n(x) \rangle - n_0| = n_{g,u} \exp(-x/\xi_{g,u})$. Durch die Dimerisierung unterscheiden sich die Untergitter für gerade bzw ungerade Platznummer. Die charakteristische Zerfallslänge ξ ist kaum wechselwirkungsabhängig und entspricht ungefähr der unrenormierten Energielücke $\xi^{-1} = 2u$, [8]. Die Vorfaktoren $n_{g,u}$ hängen linear von der Störstellenstärke ab. Für die numerische Simulation setzten wir die Störstelle in die Mitte einer periodisch geschlossenen Kette zwischen eine schwache und eine starke Bindung auf das Untergitter der geraden Plätze. Während der Abfall auf dem geraden Untergitter zu beiden Seiten gleich ist, unterscheidet er sich auf dem ungeraden Untergitter etwas. Das liegt daran, dass die Abstossungs-Effekte durch die (repulsive) Störstelle nicht wie in der translationsinvarianten Kette durch eine zweite Störstelle mit entgegengesetzten Vorzeichen ausgeglichen wurden. Abbildung 8. 3 zeigt im unteren Plot auf einer logarithmischen Skala ein Beispiel der Dichteverteilung in dem oben beschriebenen System. Im oberen Teil sind die Parameter $n_{g,u}$ und $\xi_{g,u}$ als

Funktion der Wechselwirkung zu sehen.

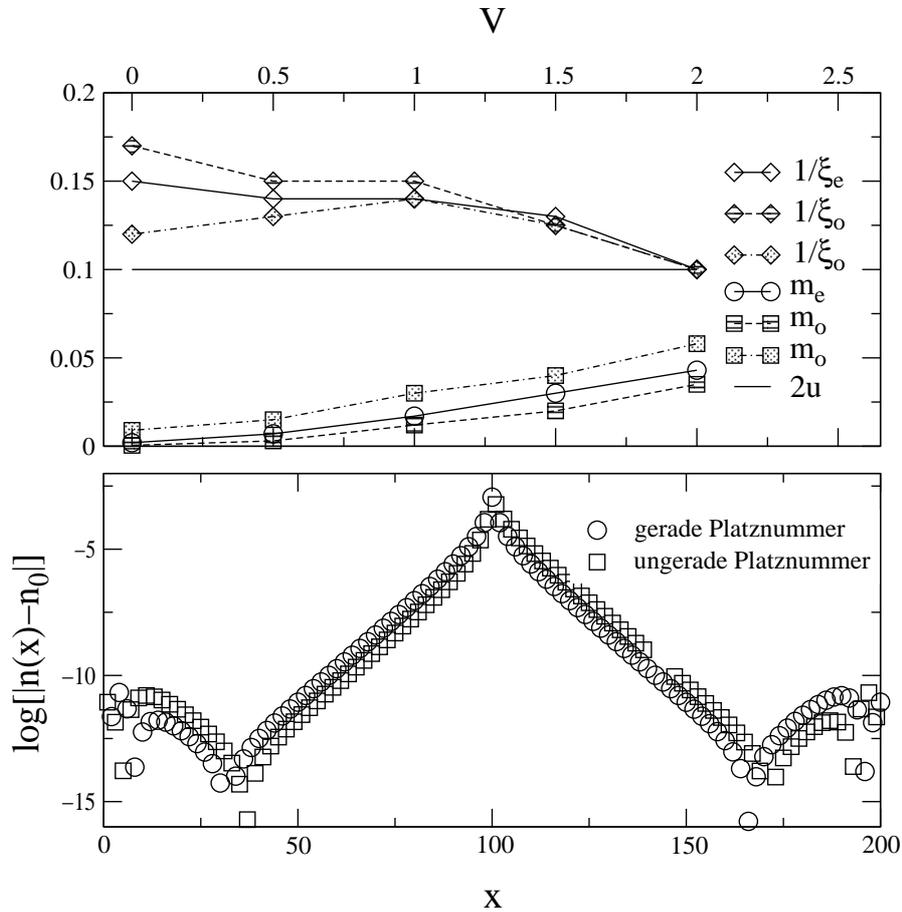


Abbildung 8. 3: Zusammenfassung der Ergebnisse für den Abfall der Friedel-Oszillationen in einer dimerisierten Kette mit $u = 0.05$ und $\varepsilon = 0.1t$. Die Parameter der unteren Figur sind: $V = 1$, $u = 0.05$ und $\varepsilon = 0.1$.

Exakte Rechnungen: Bethe-Ansatz

Unsere Studien wurden ergänzt durch die Untersuchung exakt lösbarer Modelle. Ein Aspekt war das Verhalten von verschiedenen Störstellentypen in eindimensionalen Systemen. Bei Kondo-Störstellen darf der Anteil des Potentialstreuers im Gegensatz zu höheren Dimensionen nicht vernachlässigt werden, was zu einem zusätzlichen Renormierungsgruppen-Fixpunkt führt [9]. Außerdem wird das effektive magnetische Moment erhöht. Auch bei der Veränderung einer Bindung am Ende einer Spin-Kette treten in der exakten Lösung neue Nicht-Fermi-Flüssigkeits-Phänomene auf, welche die effektive Stärke des Störstellenspins und die Kondotemperatur verändern [10]. Weiterhin wurde die Bethe-Ansatz-Lösbarkeit verschiedener Modelle mit deformierter Statistik geprüft. In Hubbard-ähnlichen Modellen führt eine deformierte Statistik auf ein Energiespektrum, das äqui-

valent ist zu einem Hubbard-Modell mit spinabhängigen Randphasen [11]. Für Modelle mit korreliertem Hüpfen und Hubbard-Wechselwirkung wurde eine Charakterisierung Bethe-Ansatz-lösbarer Modelle gefunden und ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Lösbarkeit formuliert [12]. Anschließend konnte noch die Verbindung zwischen deformierter Statistik und korreliertem Hüpfen bestimmt und die Ergebnisse von [11] auf korreliertes Hüpfen übertragen werden [13]. Eine andere Erweiterung des Hubbard-Modells, nämlich das Hubbard-Modell mit zwei entarteten Bändern, kann ebenfalls mithilfe des Bethe-Ansatzes exakt gelöst werden [14]. Im Spezialfall von viertel-gefüllten Bändern und starker Wechselwirkung, dem Kugel-Khomskii-Modell [15], konnte der Grundzustand (Ausrichtung der Spin- und Orbitalfreiheitsgrade), die elementaren Anregungen und das Spektrum der aus ihnen bestehenden generalisierten Magnonen bestimmt werden [16].

Quasi-eindimensionale und zweidimensionale Systeme

Als Erweiterung zu den oben beschriebenen streng eindimensionalen Ketten studierten wir quasi-eindimensionale Metalle. Grundannahme aller hier aufgeführten Untersuchungen war, dass das elektronische System im Rahmen der Fermi-Flüssigkeitstheorie gut beschrieben wird. Untersucht wurden Fragen der quantenmechanischen Kohärenz in an sich gut verstandenen Metallen wie Gold oder Kupfer. Zunächst stand hier das Problem der Phasenbrechung im Vordergrund, d.h. ob und wie die Quantenkorrekturen zur Leitfähigkeit unterdrückt werden. Während in einem Metall mit statischen Defekten die Phasenkohärenzzeit für kleine Temperaturen divergiert, produziert die Störstellendynamik eine temperaturunabhängige Phasenkohärenzzeit [17], wie sie in vielen Experimenten beobachtet wird. Wir beschrieben dynamische Defekte durch Zwei-Niveau-Systeme,

$$H = \begin{pmatrix} \epsilon & \Delta \\ \Delta & -\epsilon \end{pmatrix}, \quad (2)$$

wobei eine Standard Zufallsverteilung der Parameter ϵ und Δ angenommen wurde, $P(\epsilon, \Delta) \propto 1/\Delta$. Motiviert von der Idee [18], dass es eine Beziehung zwischen starker Phasenbrechung und großen Dauerströmen in Ringen geben könnte berechneten wir die Dauerströme in mesoskopischen Ringen für ein Modell mit Zwei-Niveau-Systemen. Die Wechselwirkung von Leitungselektronen mit Zwei-Niveau-Systemen erhöht den Dauerstrom. Eine genaue Vorhersage der Amplitude gestaltet sich jedoch schwierig, da sie von einer Reihe von Modellparametern, wie zum Beispiel der Konzentration der Störstellen abhängt. Der Dauerstrom lässt sich aber mit der experimentell zugänglichen Phasenkohärenzzeit ausdrücken, was die Zahl der freien Parameter wesentlich reduziert [19]. Unsere Untersuchungen legen einen Zusammenhang zwischen Phasenbrechung und Dauerströmen nahe: Falls Zwei-Niveau-Systeme Ursache der experimentell beobachteten Phasenbrechung sind, so sind sie auch relevant für die Dauerströme.

In einem anderen Ansatz wurden die Sättigung der Phasenkohärenzzeit und die großen Dauerströme auf ein externes elektromagnetisches Rauschen zurückgeführt [18]. Auch diese Ideen wurden von uns weiterverfolgt und lieferten neue Einsichten über die nichtlineare Leitfähigkeit von Metallen. Zunächst haben wir eine Theorie der Phasenbrechung für die Wechselwirkungskorrektur zur Leitfähigkeit (Altshuler-Aronov) ausgearbeitet; diese wird durch dynamische und statische elektrische Felder unterdrückt [20, 21]. Unsere ersten Arbeiten gingen von einem elektronischen System in der Nähe des Gleichgewichts aus. Mittlerweile formulierten wir auch die Theorie für die Wechselwirkungskorrektur zur Leitfähigkeit im Nichtgleichgewicht (Keldysh Formalismus). Als erste Anwendung diskutierten wir die Strom-Spannung Kennlinie eines mesoskopischen Drahtes [22]. Im Rahmen der Boltzmann-Transport-Theorie erfüllt die Verteilungsfunktion in einem diffusiven Draht die Gleichung

$$\frac{1}{\tau_D} \frac{\partial^2 f(\epsilon, x)}{\partial x^2} = I_{\text{coll}}, \quad (3)$$

wobei $\tau_D = L^2/D$ die Diffusionszeit und I_{coll} der (inelastische) Stoßterm sind; $x = 0 \dots 1$ kennzeichnet die Position auf dem Draht. Für die Lösung der Gleichung ist das Verhältnis von Diffusionszeit τ_D und inelastischer Streuzeit τ_{inel} entscheidend [23]: Falls $\tau_D \ll \tau_{\text{inel}}$ sind inelastische Stöße vernachlässigbar und die Verteilungsfunktion ist eine lineare Superposition der Verteilungsfunktionen an den Kontakten

$$f(\epsilon, x) = (1 - x)f_F(\epsilon + eV/2) + xf_F(\epsilon - eV/2). \quad (4)$$

Zur Vereinfachung nehmen wir “ideale Kontakte” an, d.h. die Spannung fällt nur in der Probe ab, und die Kontakte selbst sind im thermischen Gleichgewicht. $f_F(\epsilon)$ ist die Fermifunktion. In einem anderen wichtigen Grenzfall, $\tau_D \gg \tau_{\text{inel}}$, führen viele inelastische Stöße zur Thermalisierung der Elektronen, so dass eine lokale Fermifunktion mit lokalem chemischen Potential $\mu_x = (x - 1/2)eV$ und lokaler Temperatur T_x die kinetische Gleichung in guter Näherung löst, d.h. $f(\epsilon, x) = f_F(\epsilon - \mu_x)$. Im Rahmen der Boltzmann-Transport-Theorie sind die beiden Fälle in der Strom-Spannungskennlinie nicht zu unterscheiden: Der Strom ist $I = GV$, wobei der Leitwert gegeben ist durch $G = 2e^2 DN_0 \mathcal{A}/L$. Bei niedriger angelegter Spannung führt die Elektron-Elektron Wechselwirkung zu einer $1/\sqrt{T}$ Korrektur zur Leitfähigkeit. Explizit findet man für die Korrektur zum Strom $\delta I \approx -0.5(e^2/\hbar)(L_T/L)V$, wobei $L_T = \sqrt{D/T}$ die thermische Diffusionslänge ist. Numerische Ergebnisse sind in Abbildung 8. 4 gezeigt. Die Strom-Spannungskennlinie zeigt eine Skalierung mit eV/kT , wobei T die Temperatur in den Kontakten bezeichnet. Im lokalen Gleichgewicht und im Nicht-Gleichgewicht werden verschiedene Skalierungsfunktionen gefunden. Deutlich ist zu sehen, daß eine Transportspannung die Quantenkorrektur unterdrückt.

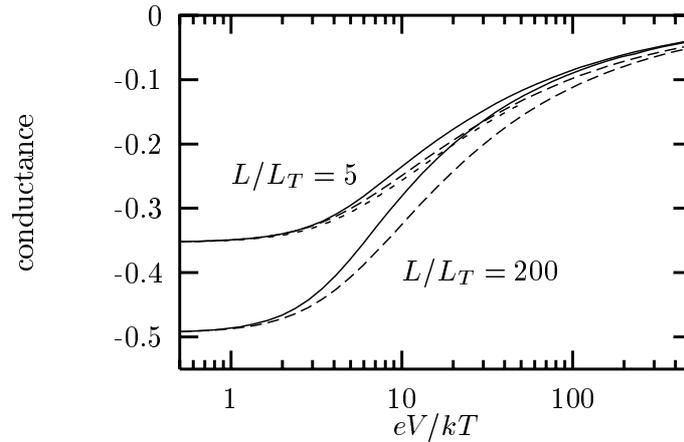


Abbildung 8. 4: Die Wechselwirkungskorrektur zum Leitwert I/V eines mesoskopischen Drahtes als Funktion der Spannung. I/V ist in Einheiten $(e^2/\hbar)L_T/L$ aufgetragen, wobei L_T die thermische Diffusionslänge und L die Länge des Drahtes ist. Durchgezogene Linien: Nichtgleichgewicht; gestrichelte Linien: lokales Gleichgewicht

Kooperationen

Zu den in diesem Teilprojekt bearbeiteten Themen bestehen innerhalb der Universität Augsburg enge Kontakte bzw. Kooperationen mit Mitarbeitern der Arbeitsgruppen Theoretische Physik I (Prof. Ingold, im Bereich wechselwirkende Teilchen in einem ungeordneten Potential) und Theoretische Physik III (Prof. Kampf und Mitarbeiter, im Bereich Dimerisierung und Leitersysteme). Die in Augsburg begonnene Kooperation zu ungeordneten, stark wechselwirkenden Modellen mit Dr. Weinmann wurde auch nach dessen Wechsel nach Strasbourg fortgesetzt. Die Zusammenarbeit mit den Schweizer Arbeitsgruppen (Prof. Baeriswyl, Fribourg; Dr. Zotos, EPFL), von der wichtige Impulse ausgegangen sind, wurde fortgeführt. Hier ergab sich die Möglichkeit – insbesondere in technischer Hinsicht – von einem Erfahrungsaustausch mit Dr. R. Noack, einem der Mitentwickler der DMRG, zu profitieren. Die von Peter Schwab während seines zweijährigen Aufenthalts in Rom in der Gruppe von C. Castellani begonnenen Kooperationen im Bereich der störungstheoretischen Untersuchungen der ein- und zweidimensionalen Modellsysteme wurden fortgesetzt.

Literaturhinweise

- [1] S. R. White, Phys. Rev. Lett. **69**, 2863 (1992)
 Ingo Peschel, Xiaqun Wang, Matthias Kaulke, and Karen Hallberg, *Density-*

Matrix Renormalization: A New Numerical Method in Physics, Lecture Notes in Physics, Springer Verlag (1999)

- [2] F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **47**, 1840 (1981)
- [3] C. Schuster and U. Eckern, *Ground state properties of disordered and dimerized spin chains*, Ann. Phys. (Leipzig) **8**, 585-588 (1999)
- [4] C. Schuster, *Random and periodic lattice distortions in one-dimensional Fermi and spin systems*, Dissertation, Shaker Verlag, Aachen (1999)
- [5] S. Eggert and I. Affleck, Phys. Rev. B **46**, 10866 (1992)
- [6] P. Schmitteckert and U. Eckern, Phys. Rev. B (Brief Reports) **53**, 15397 (1996)
- [7] Ein Teil dieser Ergebnisse ist bereits in [3] veröffentlicht, eine zusammenfassende Veröffentlichung ist noch in Vorbereitung.
- [8] Die Ergebnisse wurden auf der Frühjahrstagung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 2000 in Regensburg vorgestellt (TT 22.52). Eine Veröffentlichung ist ebenfalls noch in Vorbereitung.
- [9] Y. Wang and U. Eckern, *Scalar Potential Effect in an Integrable Kondo Model*, Phys. Rev. B **59**, 6400-6410 (1999)
- [10] J.-H. Dai, Y. Wang, and U. Eckern, *Ghost Spins and Novel Quantum Critical Behavior in a Spin Chain with Local Bond-Deformation*, Phys. Rev. B **60**, 6594-6600 (1999)
- [11] A. Osterloh, L. Amico, and U. Eckern, *Bethe Ansatz solution of a new class of Hubbard-type models*, J. Phys. A. **33**, L87 (2000)
- [12] A. Osterloh, L. Amico, and U. Eckern, *Solvability of Generalized Schultz-Shastry type models*, Nucl. Phys. B **588**, 531 (2000)
- [13] A. Osterloh, L. Amico, and U. Eckern, *Fermionic long-range correlations realized by particles obeying deformed statistics*, J. Phys. A **33**, L487 (2000)
- [14] You-Quan Li, S.J. Gu, Z.J. Ying, and U. Eckern, *One-dimensional model for doubly degenerate electrons*, Phys. Rev. B **62**, 4866 (2000).
- [15] I. Kugel and D. I. Khomskii, Sov. Phys. JETP **37**, 725 (1973).
- [16] Y.-Q. Li, M. Ma, D.-N. Shi, and F.-C. Zhang, *Ground State and Excitations of Spin Chain with Orbital Degeneracy*, Phys. Rev. B **60** 12781-12787 (1999)

-
- [17] Y. Imry, H. Fukuyama and P. Schwab, *Low-Temperature Dephasing in Disordered Conductors: The Effect of $1/f$ Fluctuations*, Eur. Phys. Lett. **47**, 608 (1999)
- [18] V.E. Kravtsov, and B.L. Altshuler, Phys. Rev. Lett. **84**, 3394 (2000)
- [19] P. Schwab, *Persistent current in metals with a large dephasing rate*, Eur. Phys. J. B **18**, 189-192 (2000)
- [20] R. Raimondi, P. Schwab and C. Castellani, *Non-Linear Effects and Dephasing in Disordered Electron Systems*, Phys. Rev B **60**, 5818-5831 (1999)
- [21] M. Leadbeater, R. Raimondi, P. Schwab, and C. Castellani, *Non-linear conductivity and quantum interference in disordered metals*, Eur. Phys. J B **15**, 277 (2000)
- [22] P. Schwab and R. Raimondi, preprint, cond-mat/0106238
- [23] K.E. Nagaev, Phys. Lett. A **169**, 103 (1992)