

Nichtlineare Probleme in Analysis, Geometrie und Physik

Zwischenbericht August 2001

Inhaltsverzeichnis

1	Umsetzung der Ziele und Konzepte des Graduiertenkollegs	1
	Arbeitsgruppe 1	2
	Arbeitsgruppe 2	7
	Arbeitsgruppe 3	16
	Arbeitsgruppe 4	21
	Arbeitsgruppe 5	30
	Arbeitsgruppe 6	34
	Arbeitsgruppe 7	40
2	Liste der Stipendiaten und Kollegiaten	43
3	Auswahl der Stipendiaten und Kollegiaten	44
4	Ausbildungsprogramm	44
	4.1 Graduiertenkolloquium	44
	4.2 Vorlesungen	44
	4.3 Seminare und Arbeitsgemeinschaften	46
	4.4 Blockseminar „Anwendungen des Atiyah-Singer-Index-Theorems in der theoretischen Physik“	47
	4.5 Klausurtagungen auf der Reissensburg	51
5	Vergabe der Koordinationsmittel	52
6	Interne Erfolgskontrolle des Kollegs	52
7	Gastwissenschaftlerprogramm	53
	7.1 Workshop “Dynamics Days”	53
	7.2 Minisymposium “Discrete Dynamics”	53
	7.3 Gastvorlesungen	54
	7.4 Gastvorträge und Kurzaufenthalte	55
8	Zwischenbilanz	60

Zwischenbericht 2001

(weitgehend identisch mit dem Teil B, Arbeits- und Ergebnisbericht,
des dreiteiligen Antrags auf zweite Fortsetzung des Graduiertenkollegs 283)

In diesem Bericht werden die Aktivitäten der am Graduiertenkolleg beteiligten Arbeitsgruppen in den zurückliegenden drei Jahren (seit Abgabe des ersten Verlängerungsantrags) beschrieben. Der **Berichtszeitraum** erstreckt sich konkret vom **1. 9. 1998 bis 31. 8. 2001**.

1 Umsetzung der Ziele und Konzepte des Graduiertenkollegs

Mit Blick auf den im September 1998 gestellten ersten Verlängerungsantrag ist zunächst festzustellen, daß es im personellen Bereich einige Veränderungen gegeben hat, die aber auf die Struktur des Kollegs keinen grundsätzlichen Einfluß genommen haben. Zunächst ist die Wegberufung zweier bisheriger Mitglieder zu nennen: Der Heisenberg-Stipendiat Priv.-Doz. Dr. Stanislaus Maier-Paape nahm einen Ruf auf eine C3-Professur an der RWTH Aachen an, und Herr Priv.-Doz. Dr. Jens Heber folgte einem Ruf auf eine C4-Professur an der Universität Kiel. Der im Juli 2000 nach Augsburg berufene Kollege Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz trat dem Graduiertenkolleg bei (Arbeitsgruppe 3), ist mittlerweile aber einem Ruf auf eine C4-Professur an der Universität Stuttgart gefolgt. Ebenfalls auf eine C4-Stelle nach Stuttgart wechselte die Kollegiatin Frau Priv.-Doz. Dr. Barbara Wohlmuth, die sich im Berichtszeitraum an der Universität Augsburg habilitierte. Schließlich ist noch die Habilitation des Kollegiaten Dr. Peter Reimann zu vermelden und sein damit verbundener Wechsel ins Gremium der Mitglieder des Graduiertenkollegs.

Die personellen Veränderungen betreffen zwar die innere Struktur einiger Arbeitsgruppen, nicht jedoch das Kolleg als Ganzes; es besteht weiterhin aus folgenden Arbeitsgruppen:

Arbeitsgruppe 1 : Nichtlineare Analysis (Kielhöfer)

Arbeitsgruppe 2 : Dynamik und Kontrolle gewöhnlicher Differentialgleichungen (Aulbach/Colonius)

Arbeitsgruppe 3 : Numerische Lösung gekoppelter Systeme nichtlinearer partieller Differentialgleichungen (Hoppe)

Arbeitsgruppe 4 : Nichtlineare Physik komplexer Systeme (Hänggi/Linz/Reimann)

Arbeitsgruppe 5 : Globale Differentialgeometrie (Eschenburg/Heintze)

Arbeitsgruppe 6 : Stark korrelierte Vielteilchensysteme (Eckern/Ziegler)

Arbeitsgruppe 7 : Geometrische Analysis (Lohkamp)

Die Aktivitäten des Graduiertenkollegs finden primär auf den beiden Ebenen "Ausbildung" und "Forschung" statt, die auf vielfältige Weise miteinander verknüpft sind und im Folgenden näher beschrieben werden. Eine Zusammenfassung der im Berichtszeitraum erfolgten Umsetzung der Ziele und Konzepte des Kollegs wird im Abschnitt "Zwischenbilanz" auf den Seiten 116 bis 118 am Ende von Teil B gegeben. Die Einzelberichte der Stipendiaten und Kollegiaten sind im Teil C zu finden.

ARBEITSGRUPPE 1: NICHTLINEARE ANALYSIS

Prof. Dr. Hansjörg Kielhöfer

Priv.-Doz. Dr. Stanislaus Maier-Paape, Mitglied bis 31. 7. 2001, ab 1. 8. 2001 Professor an der RWTH Aachen

Dr. Dirk Blömker, Stipendiat vom 1. 4. 1997 bis 30. 4. 1998, Kollegiat vom 1. 5. 1998 bis 31. 7. 2001

Dr. Christoph Gugg, Kollegiat seit 1. 12. 1997

Dipl.-Math. Ulrich Miller, Stipendiat seit 1. 11. 1999

Dipl.-Math. Niko Tzoukmanis, Stipendiat von 1. 1. 2000 bis 31. 8. 2001, Kollegiat seit 1. 9. 2001

Forschungsthemen und erzielte Ergebnisse

Wir beziehen uns auf die Forschungsthemen des Fortsetzungsantrags vom September 1998: Alle Themen mit Ausnahme von (f) und (k) haben wir bearbeitet. Nachdem der Kollegiat Thomas Wanner aus dem Graduiertenkolleg zum 31.07.1999 ausgeschieden ist, hat niemand weiter auf dem Gebiet der "Metastabilität" gearbeitet. Der Wegfall des Themas "Dynamik in der Nähe heterokliner Netzwerke" ist dadurch begründet, dass der Stipendiat Ernst Reißner dieses Thema mit seiner Dissertation abgeschlossen und das Graduiertenkolleg 1998 verlassen hat.

(a) *Das stationäre Cahn-Hilliard-Modell*

In den Arbeiten [16], [17] wird die Musterbildung in einem Quadrat vollständig beschrieben. Wir verstehen darunter den singulären Grenzwert, wenn die Energie der Trennflächen in Form des quadratischen Gradiententerms (= der elliptischen Regularisierung) verschwindet. Dieser Grenzwert wurde bereits in [16] beschrieben; in [17] zeigen wir, dass die singulären Grenzmuster sämtliche globale Minimierer sind. Neu gegenüber dem "Minimal Interface Criterion" von Modica ist, dass die Trennflächen (interfaces) nicht notwendig minimal sind, wenn die Minimalfolge, erzeugt durch das regularisierte Problem, nicht aus Minimierern besteht.

(b) *Das dynamische Cahn-Hilliard-Modell*

Die von Maier-Paape und Wanner [22], [23] gegebene mathematische Erklärung für spinodale Entmischung im binären Cahn-Hilliard Modell wurde mittlerweile wesentlich weiterentwickelt. Für das Mehrkomponenten-Modell konnten Maier-Paape, Stoth und Wanner [26] nachweisen, dass die spinodale Entmischung (Dominanz eines stark instabilen Unterraums, welche zu charakteristischer Musterbildung führt) wesentlich von der Wahl des instabilen homogenen Gleichgewichts abhängt, in dessen Nähe man startet. Für das ternäre Modell werden die vorkommenden Muster, "pseudo-binär" mit starker gegenseitiger Kopplung und "voll ternär", genau beschrieben. In beiden Fällen kann man auch die charakteristische Wellenlänge der Lösungen nachweisen.

Von Sander und Wanner (SIAM J. Appl. Math. **60**: 2182–2202, 2000) wurde gezeigt, dass im binären Modell die spinodale Entmischung noch erheblich länger stattfindet als zunächst aufgrund von [23] zu erwarten war. Grund dafür ist die schwache Ausprägung der Nichtlinearität in der Nähe des stark instabilen dominanten Unterraums. Eine Erweiterung dieser Theorie für Mehrkomponenten-Systeme ist in Vorbereitung [25]. Eine Zusammenfassung der Theorie findet sich im Übersichtsartikel [24].

(c) *Numerische Simulation des singulären Grenzprozesses des stationären Cahn-Hilliard-Modells*

Miller und Maier-Paape [21], [20] haben einen numerischen Pfadverfolger entwickelt, um Gleichgewichte der Cahn-Hilliard- und Allen-Cahn-Gleichung zu verfolgen. Beides führt auf dasselbe Dreiparameter-Problem, dessen Lösungen in der Regel auf zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten liegen. Die Mannigfaltigkeiten bestehen aus beschränkten Verbindungen von trivialen Verzweigungspunkten ("beschränkte" Rabinowitz-Alternative).

Durch Festhalten eines dieser Parameter erhält man dann die Menge der Gleichgewichte, welche in obiger Evolutionsgleichung eine Rolle spielt. Viel Aufwand wurde betrieben, um die Lösungen in [21], den heutigen numerischen Standards entsprechend, fein genug aufzulösen. Weitere Anwendungen des Pfadverfolgers haben sich bei ähnlichen Variationsproblemen ergeben, bzw. werden noch untersucht (vergl. [13] und [19], welche beide ebenfalls nichttriviale Realisierungen der beschränkten Rabinowitz-Alternative darstellen) (siehe dazu auch den Einzelbericht von U. Miller in Teil C).

(d) *Numerische Simulation des dynamischen Cahn-Hilliard-Modells, insbesondere der spinodalen Entmischung*

In Kooperation mit unserer Arbeitsgruppe entstand das Thema der Dissertation der Stipendiatin E. Nash aus der Arbeitsgruppe 3 (Hoppe), welche 2001 abgeschlossen wurde. Sie entwickelte Finite-Elemente und Spektral-Galerkin-Verfahren zur numerischen Simulation der spinodalen Entmischung (siehe (b)) in einem Quadrat. Ihre Methoden basieren wesentlich auf der Analysis unserer Arbeitsgruppe 1. Die theoretische Erkenntnis, dass sich die Cahn-Hilliard-Gleichung in einer "großen" Umgebung des homogenen Gleichgewichts überraschend "linear" verhält, führte zur erfolgreichen Einführung des vom Ansatz her linearen Spektral-Galerkin-Verfahrens in die Numerik der spinodalen Entmischung. Ein schönes Beispiel der Symbiose von Analysis und Numerik (siehe dazu auch den Bericht der Arbeitsgruppe 3 und den Einzelbericht von E. Nash in Teil C).

(e) *Langzeitdynamik des Cahn-Hilliard-Modells, insbesondere Attraktoren*

Die durch die Numerik von Miller und Maier-Paape [21] gewonnenen Einblicke in die Struktur der kritischen Punkte (= Gleichgewichte des dynamischen Cahn-Hilliard-Modells) (siehe (c)) lassen sich wieder analytisch verwerten: Mit Hilfe von Conley-Index-Theorie konnten Maier-Paape, Mischaikow (Georgia Tech) und Wanner (Univ. of Maryland, Baltimore) in [27] Aussagen über die Feinstruktur des Attraktors der Cahn-Hilliard-Gleichung, wie etwa die Existenz von heteroklinen Verbindungen, nachweisen.

Ist die Masse gleich Null, lässt sich der Attraktor in gewissen Parameterbereichen vollständig beschreiben, bei Masse ungleich Null kann eine Mehrdeutigkeit mit zusätzlichen numerischen Studien ausgeschlossen werden (siehe dazu auch den Einzelbericht von U. Miller in Teil C).

(f) *Oberflächenwachstum, stochastische Differentialgleichungen*

Zum Thema Oberflächenwachstum, insbesondere bei der Molekularstrahlepitaxie, sind mittlerweile eine ganze Reihe von Arbeiten erschienen (vergl. [1], [2], [8] und [9]). Darin wird einerseits die zeitliche Entwicklung der Oberflächenrauigkeit untersucht. Andererseits wird die Existenz von milden Lösungen für die dabei auftretenden stochastischen Differentialgleichungen mit gewissen Nichtlinearitäten gezeigt. Dieses Thema wurde in engem Kontakt mit der Arbeitsgruppe 4 (Hänggi/Linz) bearbeitet; es ist sogar eine Arbeit mit Autoren aus beiden Gruppen entstanden (siehe [2]).

Gleichungen, die ein von Oberflächendiffusion erzeugtes Oberflächenwachstum beschreiben, wurden zusammen mit C.M. Elliott, Univ. of Sussex, in [10] untersucht.

Darüber hinaus hat sich das Thema "Stochastische Differentialgleichungen" im Berichtszeitraum verselbständigt; unsere Forschungen in diesem Bereich haben sich weit über den ursprünglich geplanten Rahmen hinaus entwickelt.

Zum einen konnte in stochastisch angeregten Cahn-Hilliard-Systemen (vergl. auch (b)) mit völlig anderen Methoden ebenfalls spinodale Entmischung nachgewiesen werden (siehe [5], [6]). Auch eine "zweite Phase" der spinodalen Entmischung scheint bei stochastisch angeregten Systemen aufzutreten (vergl. [7]).

Eine andere interessante Anwendung von stochastischen Differentialgleichungen wird von Blömker, Maier-Paape und Schneider (Univ. Bayreuth) in [3] und [4] behandelt. Beide Male wird (in

verschiedenen Versionen) die Swift-Hohenberg-Gleichung untersucht. Ohne stochastische Anregung ist die triviale Lösung in [3] stabil, so dass keine größeren Bewegungen zu erwarten sind. Trotzdem kommt es mit stochastischer Anregung zur Musterbildung. In [4] lässt sich sogar eine Amplitudengleichung herleiten (das ist eine komplexe eindimensionale stochastische gew. Dgl.), mit deren Hilfe ein niederdimensionaler Teil des Phasenraums beschrieben werden kann, welcher sowohl Trajektorien anzieht, als auch für eine lange Zeit in seiner Nähe bleibt. Letzteres Resultat hat Anwendungen auf Trajektorien des Bénard-Problems (vergl. Schöpf und Rehberg, J. Fluid Mech. 217: 235-265, 1994), siehe dazu auch die Einzelberichte von D. Blömker und C. Gugg in Teil C).

(g) *Turbulenzmodelle*

In Kooperation mit M. Niggemann (FH Würzburg) entstand im Rahmen des BMBF-Projekts "Ein neuartiges viskoelastisches Turbulenzmodell auf Basis der Renormierungsgruppentheorie" das Thema der Dissertation des Kollegiaten C. Gugg.

Ziel der "Renormierungsgruppentheorie" ist es, die Parameter in einem vereinfachten Turbulenzmodell in Form einer stochastisch angeregten Evolutionsgleichung so zu bestimmen, dass diese die komplexe Strömung in ihren Mittelwerten gut beschreibt. Getestet wird diese mathematisch nicht beweisbare Theorie auch numerisch an der 1-dimensionalen Burgers-Gleichung mit additivem weißen Rauschen. Ob und wie gut die verwandte Numerik die theoretisch existierende Lösung auch "approximiert", wurde in diesen Untersuchungen offen gelassen. In [12] wird diese Lücke geschlossen. Ähnliche Resultate gelten auch für das 2-dimensionale stochastisch gestörte System von Navier-Stokes, mit Abstrichen (die den Insider nicht überraschen) auch für das 3-dimensionale Navier-Stokes-System mit weißem Rauschen (siehe dazu auch den Einzelbericht von C. Gugg in Teil C).

(h) *Nichtlineare Variationsprobleme*

Die im Forschungsthema (d) dieses Fortsetzungsantrags beschriebene Vorgehensweise (siehe Teil A) wurde mit Erfolg in [14] und [19] umgesetzt. Es ist hervorzuheben, dass nicht nur die Existenz des singulären Grenzwerts als kritischem Punkt des nichtkonvexen Variationsproblems nachgewiesen wird, sondern dass die Analysis auch gleichzeitig qualitative Eigenschaften ("Muster") dieser kritischen Punkte liefert (siehe dazu auch (a)). In Spezialfällen zeigt sich über die Weierstraß-Erdmannschen Eckenbedingungen, dass die singulären Grenzwerte sämtlich Minimierer des nicht regularisierten Variationsproblems sind. In [19] konnte dadurch ein neuer (einfacherer) Beweis für die Existenz von Minimierern einer Klasse nichtkonvexer Variationsprobleme gegeben werden.

(i) *Verzweigungsprobleme mit Symmetrie*

In der Arbeit [11] wird die Existenz freier Schwingungen einer nichtlinearen Wellengleichung auf der Sphäre nachgewiesen. Die Symmetrie der Sphäre erlaubt neben der Existenz auch die Struktur der periodischen Lösungen zu studieren: Durch eine äquivariante Analysis finden wir stehende, rotierende und diskret-rotierende Wellen. In [15] zeigen wir die Existenz freier Schwingungen der nichtlinearen Plattengleichung auf dem gleichseitigen Dreieck. Auch hier liefert die Symmetrie des Dreiecks viele Lösungen einer speziellen Struktur wie stehende und diskret-rotierende Wellen: Ein bestimmtes Muster erscheint zu festen Bruchteilen der Periode in räumlich gedrehter Form wieder, bis es nach einer Periode in die Ausgangsform zurückkehrt.

Stellung im Graduiertenkolleg

Wie aus obigem Ergebnisbericht ersichtlich, sind 2 Dissertationen aus Kooperationen mit anderen Arbeitsgruppen entstanden, 2 Dissertationen in anderen Arbeitsgruppen sind durch Kooperation mit uns vollendet worden: Die Dissertation von D. Blömker entstand in Zusammenarbeit mit der

Arbeitsgruppe 4 (Hänggi/Linz), die von C. Gugg hat starke physikalische Bezüge und wurde angeregt durch ein BMBF-Projekt mit M. Niggemann von der FH Würzburg. Frau E. Nash von der Arbeitsgruppe 3 (Hoppe) vollendete Ihre Dissertation in Kooperation mit uns, und die Dissertation von M. Raible von der Arbeitsgruppe 4 steht thematisch in engem Bezug zu der Arbeit von D. Blömker (siehe dazu auch die Einzelberichte in Teil C).

Alle diese Themen sind insofern untereinander verknüpft, als es sich um partielle Differentialgleichungen vom Evolutionstyp mit additivem weißen Rauschen handelt (mit Ausnahme der Cahn-Hilliard-Gleichung, welche Frau Nash behandelte). Die numerischen Verfahren indessen, die Herr Raible und Frau Nash unabhängig voneinander entwickelten, sind verschieden und sollten verglichen werden. Alle 4 Doktoranden trafen sich regelmäßig in gemeinsamen Oberseminaren, in denen über den Stand der Arbeiten berichtet wurde.

Publikationen, die im Berichtszeitraum entstanden sind und in Zusammenhang mit dem Graduiertenkolleg stehen

- [1] D. Blömker und C. Gugg, *On the existence of solutions for amorphous molecular beam epitaxy*, erscheint in J. Nonl. Anal.: Series B, Real World Applications, 2000.
- [2] D. Blömker, C. Gugg und M. Raible, *Thin-film-growth-models: Roughness and correlation functions*, Eingereicht zur Publikation, 2001.
- [3] D. Blömker und S. Maier-Paape, *Pattern formation below criticality forced by noise*, erscheint in Z. Angew. Math. Phys.
- [4] D. Blömker, S. Maier-Paape und G. Schneider, *The stochastic Landau equation as an amplitude equation*, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, Report Nr. **437**, 2001.
- [5] D. Blömker, S. Maier-Paape und T. Wanner, *Spinodal decomposition for the stochastic Cahn-Hilliard equation*, in *Proceedings of the Equadiff'99*, Bd. 2, 1265–1267, World Scientific Publishing, Singapur, 2000.
- [6] D. Blömker, S. Maier-Paape und T. Wanner, *Spinodal decomposition for the Cahn-Hilliard-Cook equation*, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, Report Nr. **426**, 2000.
- [7] D. Blömker, S. Maier-Paape und T. Wanner, *Second phase spinodal decomposition for the Cahn-Hilliard-Cook equation*, in Vorbereitung.
- [8] D. Blömker, S. Maier-Paape und T. Wanner, *Roughness in surface growth equations*, erscheint in *Interfaces and Free Boundaries*, 2001.
- [9] D. Blömker, S. Maier-Paape und T. Wanner, *Surface roughness in molecular beam epitaxy, Stochastics and Dynamics*, **1**: 239-260, 2001.
- [10] C.M. Elliott und S. Maier-Paape, *Losing a graph with surface diffusion*, erscheint im Hokkaido Mathematical Journal.
- [11] C. Gugg, T. J. Healey, H. Kielhöfer und S. Maier-Paape, *Nonlinear standing and rotating waves on the sphere*, J. Diff. Equations **166**, 402-442, 2000.
- [12] C. Gugg, H. Kielhöfer und M. Niggemann, *On the approximation of the stochastic Burgers equation*, Preprint, 2001.
- [13] T.J. Healey und U. Miller, *Pathfollowing a two-dimensional elasticity problem*, in Vorbereitung.
- [14] T.J. Healey und H. Kielhöfer, *Global continuation via higher-gradient regularization and singular limits in forced one-dimensional phase transitions*, SIAM J. Math. Anal. **31**, 1307-1331, 2000.

- [15] T.J. Healey, H. Kielhöfer und E. L. Montes-Pizarro, *Free nonlinear vibrations for plate equations on the equilateral triangle*, Nonl. Anal., Theory, Methods, & Appl. **44**, 575-599, 2001.
- [16] H. Kielhöfer, *Pattern formation of the stationary Cahn-Hilliard model*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **127A**: 1219–1243, 1997.
- [17] H. Kielhöfer, *Minimizing sequences selected via singular perturbations, and their pattern formation*, Arch. Rat. Mech. Anal. **155**, 261-276, 2000.
- [18] H. Kielhöfer, *Pattern formation of minimizing sequences of the stationary Cahn-Hilliard model*, Equadiff 99 (Vol.1), Proceedings of the International Conference on Differential Equations, 506-511, 2000.
- [19] H. Kielhöfer, *Critical points of nonconvex and noncoercive functionals*, Report Nr. **440**, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 2001.
- [20] S. Maier-Paape und U. Miller, *The set of equilibria for the Allen-Cahn equation on the square*, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, Report Nr. **420**, 1999.
- [21] S. Maier-Paape und U. Miller, *Pathfollowing the equilibria of the Cahn-Hilliard equation on the square*, revised version, 2001.
- [22] S. Maier-Paape und T. Wanner, *Spinodal decomposition for the Cahn-Hilliard equation in higher dimensions, Part I: Probability and wavelength estimate*, Comm. Math. Phys. **195**:435–464, 1998.
- [23] S. Maier-Paape und T. Wanner, *Spinodal decomposition for the Cahn-Hilliard equation in higher dimensions, Part II: Nonlinear dynamics*, Arch. Rat. Mech. Anal. **151**:187–219, 2000.
- [24] S. Maier-Paape, E. Sander und T. Wanner, *Spinodal decomposition: A survey of recent results*, Proc. Equadiff 99, Vol. 2, 1288-1299, 2000.
- [25] S. Maier-Paape, E. Sander und T. Wanner, *Unexpectedly linear behavior for multicomponent Cahn-Hilliard systems*, in Vorbereitung.
- [26] S. Maier-Paape, B. Stoth und T. Wanner, *Spinodal decomposition for multi-component Cahn-Hilliard systems*, J. Statist. Phys. **98**: 871-896, 2000.
- [27] K. Mischaikow, S. Maier-Paape und T. Wanner, *Structure of the attractor of the Cahn-Hilliard equation on the square*, in Vorbereitung.

Diplomarbeiten und Dissertationen, die im Berichtszeitraum abgeschlossen wurden und in Zusammenhang mit dem Graduiertenkolleg stehen

Diplomarbeiten:

- U. Miller, *Pfadverfolgung von Gleichgewichten der Cahn-Hilliard Gleichung*, Juli 1999.
- N. Tzoukmanis, *Konstruktion von Minimalfolgen durch singuläre Störungen*, Juli 1999.

Dissertation:

- D. Blömker, *Stochastic Partial Differential Equations and Surface Growth*, Februar 2000.
- C. Gugg, *Approximation of Stochastic Partial Differential Equations and Turbulence in Fluids*, Dezember 2000.

ARBEITSGRUPPE 2: DYNAMIK UND KONTROLLE GEWÖHNLICHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Prof. Dr. Bernd Aulbach

Prof. Dr. Fritz Colonius

Dipl.-Math. Tobias Gayer, Stipendiat vom 1. 12. 1999 bis 31. 12. 1999 und erneut seit 1. 6. 2000

Dipl.-Math. Stefan Grünvogel, Kollegiat vom 1. 2. 1997 bis 31. 5. 2000

Stefan Keller (Staatsexamen Mathematik/Physik), Stipendiat vom 1. 8. 1997 bis 31. 3. 2000

Dipl.-Math. Bernd Kieninger, Stipendiat vom 1. 8. 1998 bis 31. 7. 2001, Kollegiat seit 1. 8. 2001

Dipl.-Math. Christian Pötzsche, Kollegiat vom 1. 12. 1998 bis 30. 11. 2000, Stipendiat seit 1. 12. 2000

Dipl.-Math. Stefan Siegmund, Stipendiat seit 1. 10. 1996 (seit 1. 10. 1999 als Postdoktorand)

Dipl.-Math. Dietmar Szolnoki, Stipendiat vom 1. 12. 1997 bis 30. 11. 2000, Kollegiat vom 1. 12. 2000 bis 31. 5. 2001

Forschungsthemen

Im Mittelpunkt unserer Untersuchungen stehen gewöhnliche Differentialgleichungen, deren rechte Seiten explizit von der Zeit abhängen. Wir interessieren uns dabei sowohl für Gleichungen, deren zeitabhängige Koeffizienten sich als Störungen oder Kontrollen interpretieren lassen, als auch für solche, bei denen eine weitgehend willkürliche Zeitabhängigkeit vorliegt. Die verwendeten Untersuchungsmethoden stammen aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen, der topologischen und differenzierbaren Theorie dynamischer Systeme und der Kontrolltheorie.

In der Linearisierungstheorie sind die Charakterisierung und die Approximation des Lyapunov-Spektrums sowie die Konstruktion und Anwendung von invarianten Mannigfaltigkeiten, die topologische und glatte Äquivalenz sowie die Herleitung von Normalformen und Bifurkationsresultaten zu nennen. In der Globalen Analyse studieren wir insbesondere invariante Kontrollmengen und Multistabilitätsbereiche. Von zentraler Bedeutung hierfür ist das theoretische und numerische Studium von Kontrollmengen, also maximaler Gebiete vollständiger Kontrollierbarkeit. Schließlich sei noch erwähnt, daß sich viele der genannten Resultate auf stochastische Probleme anwenden lassen, indem man die Kontrollfunktion durch eine zufällige Störung ersetzt.

Die Beziehungen zwischen Dynamik und Kontrolle waren Gegenstand des Workshops "Dynamics, Bifurcations and Control, Irsee 1.-3. 4. 2001" (Organisation: F. Colonius, L. Grüne, jetzt Universität Frankfurt), der im Rahmen des Nonlinear Control Networks (TMR-Projekt, gefördert durch die EU) stattfand. Ein Tagungsbericht wird beim Springer-Verlag erscheinen.

Die Arbeit an einer Monographie [Colonius/Kliemann (2000)] über den kontrolltheoretischen Teil des skizzierten Arbeitsbereichs konnte abgeschlossen werden.

Die Beziehungen zur Diskreten Dynamik kamen im Minisymposium "Discrete Dynamics", Augsburg 30.-31. 7. 2001" zum Ausdruck, das im Rahmen der "Sixth International Conference on Difference Equations and Applications" (Organisation: B. Aulbach) veranstaltet wurde. Ein Tagungsband wird bei World-Scientific, Singapore erscheinen.

Die Arbeiten an einer Monographie über invariante Mannigfaltigkeiten für Differentialgleichungen vom Carathéodory Typ [Aulbach/Siegmund/Wanner] konnten wegen sich weiter ergebender Themen noch nicht zum Abschluss gebracht werden.

Ergebnisse

Es folgt die Beschreibung der zu den einzelnen Projekten erzielten Ergebnisse.

(a) Numerik von Kontrollmengen und Erreichbarkeitsmengen

Thema dieses Arbeitsbereichs, insbesondere der Dissertation von D. Szolnoki, ist die numerische Berechnung von Kontrollmengen, Viabilitätskernen und Erreichbarkeitsmengen. Die Methoden

sind eine reichhaltige Mischung von Konzepten aus nichtlinearer Kontrolltheorie und der Theorie dynamischer Systeme. Insbesondere werden moderne Subdivisionsmethoden aus der mengenorientierten Numerik dynamischer System, wie sie von Dellnitz und anderen in den letzten Jahren entwickelt worden sind, auf kontrolltheoretische Probleme übertragen.

Die Arbeit von D. Szolnoki stellt einen Durchbruch in den Berechnungsmöglichkeiten von Kontrollmengen in Zustandsräumen mit mehr als zwei Dimensionen dar. Die präzise Bestimmung der Kontrollmengen bei den hier betrachteten drei-dimensionalen Systeme war bisher weit außerhalb der Berechnungsmöglichkeiten. Drei einander ergänzende Algorithmen werden auf Konvergenz untersucht und implementiert: Box-Continuation, Subdivision und ein graphentheoretischer Algorithmus. Dabei stellt sich heraus, dass das aus der topologischen Dynamik übernommene Konzept der kontrollierten Ketten einen wesentlichen Beitrag zum Verständnis der Konvergenzeigenschaften liefert. Unter anderem kann die sogenannte Escape-Gleichung, die durch ein Eintopf-Potential mit Escape-Möglichkeit nach Unendlich und periodischer Anregung gegeben ist, durch Betrachtung der Poincaré-Abbildung numerisch analysiert werden. Die Analyse dieses Systems geht auf eine Anregung aus den Ingenieurwissenschaften zurück (aus der Arbeitsgruppe von Prof. Kreuzer, Arbeitsbereich Meerestechnik und Meeresforschung der TU Hamburg-Harburg). Hier ist man daran interessiert, bei beschränktem Rauschen mit unterschiedlichen Amplituden den Träger der invarianten Verteilung zu finden. Insbesondere möchte man wissen, bei welcher Amplitude kein invariantes Maß mehr existiert, also Instabilität etwa von Schiffen oder Schwimmkränen auftritt. Der Träger eines invarianten Maßes stimmt überein mit der invarianten Kontrollmenge für das zugehörige (deterministische) Kontrollsystem, das man erhält, indem man formal die Störung durch eine Kontrolle ersetzt. Die numerische Kontrollmengenanalyse erlaubt es, die Träger der invarianten Maße und damit den Übergang zur Instabilität weitaus präziser zu bestimmen, als dies mit stochastischen Methoden möglich ist. In diesem Arbeitsbereich hat auch das DFG Schwerpunktprogramm "Ergodentheorie, Analysis und effiziente Simulation dynamischer Systeme" wertvolle Anregungen geliefert. Die numerische Berechnung von Erreichbarkeitsmengen spielt auch für andere Fragestellungen, insbesondere bei hybriden Systemen, eine wichtige Rolle.

Die Numerik dieser Probleme wirft, insbesondere auf Grund der Dimensionsbeschränkungen, noch viele ungelöste Probleme auf, die im weiteren Verlauf des Graduiertenkollegs bearbeitet werden sollen.

(b) *Kontrollierbarkeit und Bifurkation an Singulären Punkten*

Die Änderungen des qualitativen Verhaltens von nichtlinearen Kontrollsystemen kann zunächst in einer besonders einfachen Situation, in der Nähe eines singulären Punktes, studiert werden. Stefan Grünvogel hat hier in seiner Dissertation einen neuen Ansatz zum Studium von Kontrollierbarkeitseigenschaften eingeführt: Er leitet Kontrollierbarkeitseigenschaften aus Eigenschaften des Lyapunov-Spektrums (also der Menge der Lyapunov-Exponenten der linearisierten Gleichung, eines bilinearen Kontrollsystems) her. Dieser Ansatz erweist sich als sehr fruchtbar und wird sicherlich eine ganze Reihe von weiteren Untersuchungen in dieser Richtung anregen. Unter anderem sind seine Aussagen eine Basis, um eine Bifurkationstheorie für Kontrollsysteme zu entwickeln. Bifurkationsphänomene bei Kontrollsystemen finden in letzter Zeit, angeregt durch technische Anwendungen und auch durch parallele Entwicklungen in der Bifurkationstheorie stochastischer dynamischer Systeme (L. Arnold u.a.), lebhaftes Interesse.

Die grundlegende Idee der Arbeit von Grünvogel ist sehr intuitiv: Er betrachtet Systeme nahe einem Gleichgewicht, das fest bleibt, egal, welche Kontrolle angewendet wird. Es gebe jetzt eine Kontrolle, für die das Gleichgewicht asymptotisch stabil wird, sowie eine weitere Kontrolle, für die eine instabile Mannigfaltigkeit existiert. Dann kann man durch Umschalten zwischen diesen beiden Kontrollen beliebig nahe an das Gleichgewicht laufen und wieder davon weg, etwa zu eine Sphäre (um das Gleichgewicht) auf der instabilen Mannigfaltigkeit. Weil die Sphäre kom-

pakt ist, gibt es einen Bereich vollständiger Kontrollierbarkeit, der sowohl das Gleichgewicht als auch einen Punkt auf der Sphäre in seinem Abschluss enthält. Dies ist die gesuchte Kontrollierbarkeitsaussage. Die technische Umsetzung dieser Argumentation ist anspruchsvoll und erfordert eine gute Einsicht in die Spektraltheorie bilinearer Kontrollsysteme und in das dynamische Verhalten nichtautonomer Differentialgleichungen. Insbesondere sind die von Aulbach angeregten Arbeiten zu invarianten Mannigfaltigkeiten nichtautonomer Systeme eine Basis der von Grünvogel vorgelegten Argumentation. Bei der Analyse einer Reihe von Beispielen werden die zugehörigen Kontrollmengen numerisch mit einem Subdivisionsalgorithmus von D. Szolnoki, der auf das Programm GAIO von Dellnitz/Junge aufbaut, berechnet.

Die weitere Analyse des Bifurkationsverhaltens, insbesondere auch in regulären Situationen, wird ein wesentlicher Arbeitsbereich bleiben.

(c) *Weitere Strukturuntersuchungen nichtlinearer Kontrollsysteme*

In Zusammenarbeit mit W. Du konnte ein Shadowing Lemma für hyperbolische Kontrollsysteme gezeigt werden, das auf ihrer Interpretation als Schiefproduktflüsse basiert. Im Gegensatz zu bekannten Ergebnissen für Schiefproduktflüsse werden hier auch Sprünge im Basisfluss zugelassen, was es erlaubt, ein Resultat über stetige Abhängigkeit von Kontrollmengen von Parametern zu beweisen. Mit M. Spadini wurde das Konzept der lokalen Kontrollmengen (das sind lokal maximale Mengen vollständiger Kontrollierbarkeit) eingeführt, das es besser als bisher erlaubt, lokale und globale Phänomene zu unterscheiden. Insbesondere konnte lokale Eindeutigkeit in der Nähe hyperbolischer Gleichgewichte gezeigt werden; ferner wurde ein Index eingeführt, der lokale Kontrollmengen über Homotopieklassen periodischer Trajektorien klassifiziert. Siegmund und Colonius haben Normalformen für Kontrollsystemen an singulären Punkten eingeführt. Schließlich konnten in Zusammenarbeit mit Kliemann die kettentransitiven Mengen von linearen Flüssen auf Fahnen-Bündeln klassifiziert werden, was zu einer zugehörigen Verallgemeinerung des Morse-Spektrums führt. Dies sollte auch in Beziehung zu Untersuchungen in der Theorie von Lie-Halbgruppen gesehen werden, die über die Kontrollmengen auf den zugehörigen Fahnen-Mannigfaltigkeiten von San Martin und anderen studiert werden. Einige Vermutungen in diesem Bereich sind in einer gemeinsamen Arbeit mit Kliemann und San Martin skizziert worden. Diese Zusammenarbeit wird im Herbst 2001 bei einem Besuch von Colonius in Campinas (San Martin), Brasilien, fortgesetzt. Zum besseren Verständnis dieser Beziehungen haben wir im Studienjahr 2000/2001 gemeinsam mit der Arbeitsgruppe 5 ein Seminar durchgeführt, in dem wir sehr von deren Kenntnissen über Fahnenmannigfaltigkeiten profitiert haben.

(d) *Qualitative Analyse von Differentialgleichungen vom Carathéodory Typ*

Es war das Ziel dieses Projekts, für Differentialgleichungen mit nur meßbarer Zeitabhängigkeit Ergebnisse herzuleiten, die für die qualitative Analyse solcher Systeme grundlegend sind. In den Arbeiten [6, 9] wurden zunächst die Existenz und Eigenschaften invarianter Mannigfaltigkeiten und Faserungen, die Theorie der Zentrumsmannigfaltigkeiten, das Reduktionsprinzip, der Satz von Hartman-Grobman und dessen Verallgemeinerung, der sog. Satz von Palmer-Šoštaišvili, bewiesen. Nachdem schließlich in der Dissertation [50] von Stefan Siegmund auch noch sämtliche Glattheitfragen im Zusammenhang mit invarianten Mannigfaltigkeiten und Faserungen für den betrachteten Gleichungstyp geklärt wurden, konnte das ursprüngliche Projekt als abgeschlossen angesehen werden. Durch die in Siegmunds Dissertation begonnene Spektral- und Normalformtheorie wurden jedoch weitere Problemkreise geöffnet, die weiterer Erforschung bedürfen. Erste Publikationen hierzu findet man in [51, 54-56].

Die Abfassung einer Monographie zu diesem Thema wurde in Angriff genommen, konnte jedoch noch nicht beendet werden, da sich eine Reihe weiterer Themen ergeben haben, auf deren Behandlung wir wegen ihres Richtung weisenden Charakters nicht verzichten wollen.

(e) *Qualitative Analyse nichtautonomer Differenzgleichungen*

Sowohl aus theoretischer wie anwendungsorientierter Sicht besteht ein beträchtlicher Mangel an qualitativen Methoden für Differenzgleichungen. Um diesem Mangel abzuweichen, haben wir uns die Entwicklung einer qualitativen Theorie für solche Gleichungen zum Ziel gesetzt, wobei – speziell im Hinblick auf die Behandlung nichtstationärer Probleme, insbesondere Chaos – die rechten Seiten der Gleichungen explizit (i. a. nicht-periodisch) von der Zeit abhängen. In den Arbeiten [4, 7, 11, 16, 53] werden (gewissermaßen vorbereitende) Ergebnisse über *lineare* Systeme bewiesen, wobei wir – insbesondere im Hinblick auf Anwendungen auf unendlich-dimensionale Probleme – die Existenz von Rückwärtslösungen nicht voraussetzen. Die Arbeiten [1, 5, 10, 14, 18, 49, 57] behandeln verschiedene Fragestellungen für *nichtlineare* Systeme, die dem weiteren Ausbau der qualitativen Theorie nichtautonomer Differenzgleichungen dienen.

(f) *Dynamische Gleichungen auf Maßketten*

Obwohl sich der vor etwa 10 Jahren von B. Aulbach und S. Hilger ins Leben gerufene (und mittlerweile in zwei Monographien popularisierte) sog. Maßkettenkalkül seitdem gut entwickelt hat, sind doch eine Reihe wichtiger Themen noch nicht (bzw. nicht ausreichend) behandelt. In Richtung eines weiteren Ausbaus dieser Theorie zielen die folgenden Arbeiten:

Der Diplomand Ludwig Neidhart hat in [46] gezeigt, daß alle einschlägigen Integrationsbegriffe im Maßkettenkalkül entwickelt werden können, insbesondere das allgemeine maßtheoretische Integral für Funktionen mit Werten in einem Banachraum.

In seiner Dissertation [45] hat der Stipendiat Stefan Keller zunächst einige grundlegende Ergebnisse des Maßkettenkalküls erarbeitet, die für das Studium dynamischer Gleichungen benötigt werden. Das Hauptergebnis von Kellers Dissertation ist der Nachweis, daß sich die einschlägigen Ergebnisse zur Diskretisierung von invarianten Mannigfaltigkeiten im Rahmen dieses Kalküls in essentieller Weise verallgemeinern und vereinheitlichen lassen. Besonders zu betonen ist in diesem Zusammenhang der Wegfall der bislang erforderlichen Beschränkung auf autonome Systeme und konstante Schrittweiten. Ein weiterer Schwerpunkt von Kellers Dissertation ist die Entwicklung der Mittelwertmethode (averaging) im Maßkettenkalkül, was insbesondere zur Folge hat, daß die zunächst nur für Differentialgleichungen entwickelte Mittelwertmethode nun auch für Differenzgleichungen vorliegt (siehe dazu den Einzelbericht von S. Keller im Teil C).

Im Rahmen seines Promotionsprojekts hat der Stipendiat Christian Pötzsche neben einigen grundlegenden Beiträgen zum Maßkettenkalkül das Studium eines Gleichungstyps in Angriff genommen, in dem zwei unterschiedlich schnelle Zeiten auftreten. Für die sog. langsamen Mannigfaltigkeiten solcher Systeme hat er die Existenz und eine Reihe von Eigenschaften bereits gezeigt, weitere Fragen die Glattheit und das dynamische Verhalten in der Nähe dieser Mannigfaltigkeiten sollen noch geklärt werden (siehe dazu den Einzelbericht von C. Pötzsche im Teil C). Weitere Beiträge zum Maßkettenkalkül und dessen Anwendung auf dynamische Gleichungen findet man in [15, 47, 48, 52].

(g) *Chaotische Dynamik und fraktale Mengen*

Im Rahmen des Promotionsprojekts des Stipendiaten Bernd Kieninger sollen Attraktoren iterierter Funktionensysteme im Hinblick auf ihre topologischen und dynamischen Eigenschaften untersucht werden. Da es sich gezeigt hat, daß die meisten der bislang vorliegenden Ergebnisse zu diesem Problemkreis unter unnötig stark einschränkenden Bedingungen (z.B. Kontraktionen auf metrischen Räumen) hergeleitet wurden, hat Herr Kieninger zunächst die grundlegenden Ergebnisse über die Existenz und die Klassifizierung solcher Attraktoren unter möglichst schwachen Bedingungen (stetige Funktionen auf kompakten Hausdorffräumen) bewiesen. Speziell bei der Klassifizierung invarianter Mengen konnten durch die Einführung sog. Faserungstypen interessante neue Einsichten gewonnen werden. Zusätzliche topologische, algebraische und dynamische Eigenschaften von iterierten Funktionensystemen und ihren Attraktoren sollen im

weiteren Verlauf des Promotionsprojekts noch untersucht werden (siehe dazu den Einzelbericht von B. Kieningner im Teil C). Einige grundlegende Fragen zur chaotischen Dynamik, die sich aus Kieningers Diplomarbeit ergeben haben, sind in [8] und [17] veröffentlicht.

(h) *Asymptotisches Verhalten nichtautonomer nichtlinearer Evolutionsgleichungen*

In diesem Projekt untersuchen wir das asymptotische Lösungsverhalten nichtautonomer nichtlinearer Differentialgleichungen auf dem Niveau abstrakter Evolutionsgleichungen. Die Grundidee der Vorgehensweise ist, Konzepte der für autonome und lineare Gleichungen wohletablierten Halbgruppentheorie so zu modifizieren (durch Einführung der sog. Evolutionshalbgruppen nichtlinearer Operatoren), daß sie sich auf Gleichungen anwenden lassen, die weder autonom noch linear sind. Speziell für die Klasse fastperiodischer Evolutionsgleichungen finden sich in [2, 3, 12, 13] Ergebnisse zu Existenz und Eigenschaften von fastperiodischen Lösungen, die auch Anwendungen im Bereich der gewöhnlichen und partiellen Funktionaldifferentialgleichungen besitzen.

Stellung im Graduiertenkolleg

Die zu Beginn der zweiten Förderperiode erfolgte Einrichtung einer gemeinsamen Arbeitsgruppe der Kollegen Aulbach und Colonius hat sich in hohem Maße bewährt. Sie hat zu einer Fülle von Diskussionen und Anregungen geführt, die sich als sehr fruchtbar für alle Beteiligten erwiesen haben. Dies gilt nicht nur für die Konstruktion von bifurkierenden Kontrollmengen im Promotionsprojekt des Kollegiaten Grünvogel (Betreuer: Colonius), wo an entscheidender Stelle Ergebnisse von Aulbach und Wanner über invariante Mannigfaltigkeiten nichtautonomer Differentialgleichungen (mit unstetiger Zeitabhängigkeit) benötigt wurden. Es gilt ebenso für das gemeinsame und rasch anwachsende Interesse an mengenorientierten Methoden, insbesondere der Verwendung des Softwarepakets GAIO für verschiedenen Klassen von nichtautonomen Differentialgleichungen, und darüberhinaus unter anderem für Normalformentheorie von Kontrollsystemen (Colonius/Siegmund) und laufende Arbeiten über Kontrolle singular gestörter Kontrollsysteme. Schließlich hat sich auch im Rahmen des Promotionsprojekts des Stipendiaten Kieninger ein interessanter und neuartiger Aspekt ergeben, der es als möglich erscheinen läßt, invariante Kontrollmengen bestimmter Kontrollsysteme als minimale invariante Mengen interierter Funktionensysteme aufzufassen.

Die Expertise der Arbeitsgruppe 3 (Hoppe) im Bereich der Numerik partieller Differentialgleichungen, insbesondere in Bezug auf lokale Fehlerschätzer zur adaptiven Gitterkonstruktion, hat die Entwicklung eines effektiven Verfahrens zur Lösung von Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichungen ermöglicht. Auch bei der Erstellung der Dissertation [44] des Stipendiaten Stefan Keller zur Diskretisierung invarianter Mannigfaltigkeiten im Rahmen des Maßkettenkalküls war die Zusammenarbeit mit der Arbeitsgruppe 3 von großem Nutzen.

Mit der Arbeitsgruppe 4 (Hänggi/Linz/Reimann) verbindet uns das Interesse an dynamischen Systemen und stochastischen Differentialgleichungen. Die Dissertation von Lars Callenbach (Betreuer: Hänggi) war verschiedenen, auch kontrolltheoretischen Methoden der Synchronisation dynamischer Systeme gewidmet, was sich u. a. im Zweitgutachten für diese Dissertation durch Fritz Colonius ausdrückt. Ferner gibt es insbesondere bei der Analyse des Verhaltens von angeregten Oszillatoren mit Zwei-Mulden-Potentialen, die von verschiedenen Seiten betrachtet werden, starke gemeinsame Interessen. Auch bei den Promotionsprojekten der Stipendiaten Ralf Eichhorn (zur Identifizierung und Klassifizierung einfacher chaotischer Systeme) und Bernd Reinhard (zur Beschreibung der Dynamik von Ionenfallen) war ein Mitglied unserer Arbeitsgruppe (Bernd Aulbach) als Berater und Zweitgutachter tätig bzw. ist vorgesehen.

Mit der Arbeitsgruppe 5 (Eschenburg/Heintze) verbindet uns das gemeinsame Interesse an Lie-(Halb)gruppen und Fahnen-Mannigfaltigkeiten. Dies hat sich materialisiert in einem gemeinsamen Seminar im Studienjahr 2000/2001 über Fahnenmannigfaltigkeiten und Kontrollmengen und wird mit Sicherheit fortgesetzt werden.

Seit jüngster Zeit besteht eine interessante und aussichtsreiche Verbindung zur Arbeitsgruppe 6 (Eckern/Ziegler), in der bei der Behandlung ungeordneter eindimensionaler Fermi-Systeme diskrete Schrödinger-Gleichungen auftreten, die lineare nichtautonome Differenzgleichungen zweiter Ordnung sind. Die zu diesem Gleichungstyp vorhandene klassische Literatur aus der mathematischen Theorie der Differenzgleichungen läßt sich zwar nicht direkt anwenden, liefert aber erfolversprechende Hinweise zur Analyse zahlreicher aus der Physik der Vielteilchensysteme stammender Gleichungen. Zur Behandlung der oben erwähnten Schrödinger-Gleichung ist eine gemeinsame, fachübergreifende Veröffentlichung [19] in Vorbereitung, an der auch ein auswärtiger Differenzgleichungsexperte und Lehrbuchautor (Prof. Elaydi) beteiligt ist.

Schließlich hat der Stipendiat Bernd Kieninger bei allen Fragen zu topologischen Eigenschaften der von ihm untersuchten Fraktale von der Zusammenarbeit mit den Mitgliedern der Arbeitsgruppe 7 (Lohkamp) profitiert.

Publikationen, die im Berichtszeitraum entstanden sind und in Zusammenhang mit dem Graduiertenkolleg stehen

- [1] B. Aulbach, *The fundamental existence theorem on invariant fiber bundles*, J. Difference Eqns. Appl. 3 (1998), 501-537.
- [2] B. Aulbach and Nguyen Van Minh, *Almost periodic mild solutions of a class of partial functional differential equations*, Abstract and Applied Analysis 3 (1998), 425-436.
- [3] B. Aulbach and Nguyen Van Minh, *Semigroups and differential equations with almost periodic coefficients*, Nonlinear Analysis 32 (1998) 287-297.
- [4] B. Aulbach, Nguyen Van Minh and P.P. Zabreiko, *Structural stability of linear difference equations in Hilbert space*, Computers and Mathematics with Applications 36 (1998), 71-76.
- [5] B. Aulbach, *The role of invariance in the theory of nonautonomous difference equations*, in "New Developments in Difference Equations and Applications", S.S.Chen, S.Elaydi and G.Ladas, (eds.) Gordon and Breach, Amsterdam 1999, 25-39.
- [6] B. Aulbach and T. Wanner, *The Hartman-Grobman theorem for Carathéodory-type differential equations in Banach spaces*, Nonlinear Analysis 40 (2000), 91-104.
- [7] B. Aulbach and J. Kalkbrenner, *Exponential forward splitting for noninvertible difference equations*, Journal of Computers and Mathematics with Applications 42 (2001), 743-754.
- [8] B. Aulbach and B. Kieninger, *On three definitions of chaos*, Nonlinear Dynamics and Systems Theory 1 (2001), 23-37.
- [9] B. Aulbach and T. Wanner, *Invariant foliations for Carathéodory-type differential equations in Banach spaces*, erscheint in "Advances of Stability Theory at the End of XX Century", V.Lakshmikantham and A.A.Martynyuk, (eds.), Gordon and Breach, Amsterdam.
- [10] B. Aulbach, *On the subtle role of invertibility in discrete dynamics*, erscheint in "Proceedings of the 5th International Conference on Difference Equations and Applications", Temuco/Chile 2000.
- [11] B. Aulbach and S. Siegmund, *A spectral theory for nonautonomous difference equations*, erscheint in "Proceedings of the 5th International Conference on Difference Equations and Applications, Temuco/Chile 2000.
- [12] B. Aulbach and Nguyen Van Minh, *A sufficient condition for almost periodicity of solutions of nonautonomous nonlinear evolution equations*, erscheint in "Nonlinear Analysis".
- [13] B. Aulbach and Nguyen Van Minh, *Bounded and almost periodic solutions and evolution semigroups associated with nonautonomous functional differential equations*, erscheint in "Abstract and Applied Analysis".

- [14] B. Aulbach and C. Pötzsche, *Invariant manifolds with asymptotic phase for nonautonomous difference equations*, erscheint in “Journal of Computers and Mathematics with Applications”.
- [15] B. Aulbach and C. Pötzsche, *Reducibility of linear dynamic equations on measure chains*, erscheint in “Journal of Computational and Applied Mathematics”.
- [16] B. Aulbach and S. Siegmund, *The dichotomy spectrum for noninvertible systems of linear difference equations*, erscheint in “Journal of Difference Equations and Applications”.
- [17] B. Aulbach and B. Kieninger, *An elementary proof for chaos of the quadratic family on its invariant Cantor set*, eingereicht.
- [18] B. Aulbach, C. Pötzsche and S. Siegmund, *A smoothness theorem for invariant fiber bundles*, eingereicht.
- [19] B. Aulbach, S. Elaydi and K. Ziegler, *Nonstandard difference equations techniques applied to quantum mechanics on a disordered chain*, in Vorbereitung.
- [20] F. Colonius, F. J. de la Rubia, and W. Kliemann, *Stochastic models with multistability and extinction levels*, SIAM J. Appl. Math., 56 (1996), 919–945.
- [21] F. Colonius, W. Du, *Hyperbolic control sets and chain control sets*, J. Dynamical and Control Systems, 7(2001), 49-59.
- [22] F. Colonius, U. Helmke, D. Prätzel-Wolters, F. Wirth, (eds.), *Advances in Mathematical Systems. A Volume in Honor of D. Hinrichsen*, Birkhäuser 2001.
- [23] F. Colonius, D. Hinrichsen and F. Wirth, *Lyapunov exponents and robust stabilization*, in “Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory”, V.D. Blondel, E.D. Sontag, M. Vidyasagar, and J.C. Willems, (eds.), Springer-Verlag 1998. pp. 83-88.
- [24] F. Colonius and W. Kliemann, *Continuous, smooth, and control techniques for perturbed systems*, in Stochastic Dynamics, H. Crauel and M. Gundlach, (eds.), Springer-Verlag, 1999, 181-208.
- [25] F. Colonius and W. Kliemann, *The Dynamics of Control*, Birkhäuser, 2000.
- [26] F. Colonius, W. Kliemann, *Mergers of control sets*, in “Proceedings Fourteenth International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems” (Perpignan, France, June 19-23 2000), A. El Jai and M. Fliess, (eds.).
- [27] F. Colonius and W. Kliemann, *Invariance under bounded time-varying perturbations*, in “Proc. 11th IFAC International Workshop Control Applications of Optimization” (St. Petersburg, Russia, July 3-6 2000), V. Zakharov, (ed.), pp. 82-85.
- [28] F. Colonius and W. Kliemann, *An invariance radius for nonlinear systems*, in “Advances in Mathematical Systems. A Volume in Honor of D. Hinrichsen”, F. Colonius, U. Helmke, D. Prätzel-Wolters, F. Wirth (eds.), Birkhäuser 2001, pp. 77-91.
- [29] F. Colonius and W. Kliemann, *Computation of almost invariant sets for perturbed systems*, in “Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control” (December 12-15, 2000, Sidney Australia).
- [30] F. Colonius and W. Kliemann, *Collision of control sets*, in “Ergodic Theory, Analysis, and Efficient Simulation of Dynamical Systems”, B. Fiedler, (ed.), Springer-Verlag 2001.
- [31] F. Colonius and W. Kliemann, *On dynamic bifurcations in control systems*, in “Proceedings of the IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems” (NOLCOS '01), 4-6 July 2001, St. Petersburg, Russia.
- [32] F. Colonius and W. Kliemann, *Morse decompositions and spectra on flag bundles*, eingereicht.

- [33] F. Colonijs, W. Kliemann, and L. San Martin, *Asymptotic problems – from control systems to semigroups*, in “Positivity in Lie Theory: Open Problems”, J. Hilgert, J. Lawson, K. Neeb, and E.B.Vinberg, (eds.), De Gruyter, 1998, 21-43.
- [34] F. Colonijs, S. Siegmund, *Normalforms for control systems at singular points*, eingereicht.
- [35] F. Colonijs, M. Spadini, *Uniqueness of control sets for perturbations of linear systems*, in F. Lamnabhi-Lagarrigue, A.J. van der Schaft, (eds.), Springer-Verlag 1999, pp. 115-136.
- [36] F. Colonijs, M. Spadini, *Local control sets*, eingereicht.
- [37] F. Colonijs, M. Spadini, *A dynamic index for control sets*, eingereicht.
- [38] F. Colonijs, M. Spadini, *On the classification of control sets*, eingereicht.
- [39] F. Colonijs and D. Szolnoki, *Algorithms for computing reachable sets and control sets*, in “Proceedings of the IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems” (NOLCOS '01), 4-6 July 2001, St. Petersburg, Russia.
- [40] T. Gayer, *On Markov chains and Frobenius-Perron operators*, eingereicht.
- [41] S. Grünvogel, *Bilinear control systems with symmetry*, in “Proc. GAMM Jahrestagung 1997 Regensburg”, ZAMM Supplement 3(1998).
- [42] S. Grünvogel, *The Lyapunov spectrum of blockdiagonal semilinear control systems*, J. Dynamical and Control Systems, 4 (1998), 191-216.
- [43] S. Grünvogel, *Bifurcation of control sets at singular points*, in “EQUADIFF 99”, International Conference on Differential Equation, Vol.2, (Berlin, Germany, 1-7 August 1999), B. Fiedler, K. Gröger, J. Sprekels, (eds.), World Scientific 2000, pp. 853-855.
- [44] S. Grünvogel, *Lyapunov exponents and control sets*, eingereicht.
- [45] S. Keller, *Asymptotisches Verhalten invarianter Faserbündel bei Diskretisierung und Mittelwertbildung im Rahmen der Analysis auf Zeitskalen*, Augsburgener Mathematisch-Naturwissenschaftliche Schriften, Dissertation, Augsburg, 1999.
- [46] L. Neidhart, *Integration auf Maßketten*, Diplomarbeit, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 2001.
- [47] C. Pötzsche, *Chain rule and invariance principle on measure chains*, erscheint in “Journal of Computational and Applied Mathematics”.
- [48] C. Pötzsche, *Exponential dichotomies for dynamic equations on measure chains*, erscheint in “Nonlinear Analysis”.
- [49] C. Pötzsche and S. Siegmund, *C^m -Smoothness of Invariant Fiber Bundles*, eingereicht.
- [50] S. Siegmund, *Spektral-Theorie, glatte Faserungen und Normalformen für Differentialgleichungen vom Carathéodory Typ*, Augsburgener Mathematisch-Naturwissenschaftliche Schriften, Dissertation, Augsburg, 1999.
- [51] S. Siegmund, *Dichotomy Spectrum for Nonautonomous Differential Equations*, erscheint in “Journal of Dynamics and Differential Equations”.
- [52] S. Siegmund, *A Spectral Notion for Dynamic Equations on Times Scales*, erscheint in “Special Issue on Dynamic Equations on Time Scales”, R. P. Agarwal, M. Bohner, D. O’Reagan, (eds.), J. Computational and Applied Mathematics.
- [53] S. Siegmund, *Block Diagonalization of Linear Difference Equations*, erscheint in “Journal of Difference Equations and Applications”.
- [54] S. Siegmund, *Normal Forms for Nonautonomous Differential Equations*, erscheint in “Journal of Differential Equations”.

- [55] S. Siegmund, *Normal Form of the Duffing-van der Pol oscillator under nonautonomous parametric perturbations*, in "Proceedings of the Third International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations", 2000, Kennesaw, GA, USA, May 18–21, 2000, published as an added Volume of DCDS.
- [56] S. Siegmund, *Reducibility of Nonautonomous Linear Differential Equations*, eingereicht.
- [57] S. Siegmund, *Normal Forms for Nonautonomous Difference Equations*, eingereicht.
- [58] S. Siegmund and J. López Fenner, *An (h, k) Dichotomy Spectrum for ODE's with Impulse Effect*, eingereicht.
- [59] D. Szolnoki, *Viability kernels and control sets*, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, Vol. 5 (2000), 175-185.
- [60] D. Szolnoki, *Computation of control sets using subdivision and continuation techniques*, in "Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control" (December 12-15, 2000, Sidney Australia), pp. 2135-2140.
- [61] D. Szolnoki, *Set-oriented methods for computing reachable sets and control sets*, eingereicht.

Diplomarbeiten und Dissertationen, die im Berichtszeitraum abgeschlossen wurden und in Zusammenhang mit dem Graduiertenkolleg stehen

Diplomarbeiten:

- Tobias Gayer, *Dynamik von Markov-Ketten*, Februar 1999.
- Ursula Paulus, *Floquet-Theorie für differentiell-algebraische Gleichungen*, Mai 1999.
- Helga Lugert, *Lineare Flüsse auf Grassmann-Mannigfaltigkeiten*, August 1999.
- Ludwig Neidhart, *Integration auf Maßketten*, August 2001.

Dissertationen:

- Stefan Siegmund, *Spektral-Theorie, glatte Faserungen und Normalformen für Differentialgleichungen vom Carathéodory Typ*, Oktober 1999.
- Stefan Keller, *Asymptotisches Verhalten invarianter Faserbündel bei Diskretisierung und Mittelwertbildung im Rahmen der Analysis auf Zeitskalen*, März 2000.
- Stefan Grünvogel, *Lyapunov Spectrum and Control Sets*, März 2000.
- Dietmar Szolnoki, *Algorithms for Reachability Problems*, Januar 2001.

ARBEITSGRUPPE 3: NUMERISCHE LÖSUNG GEKOPPELTER SYSTEME NICHTLINEARER PARTIELLER DIFFERENTIAL- GLEICHUNGEN

Prof. Dr. Ronald H.W. Hoppe

Dr. Barbara Wohlmuth, Kollegiatin vom 1. 10. 1996 bis 31. 8. 2001

Dipl.-Math, Eva Nash, Stipendiatin vom 1. 10. 1996 bis 30. 9. 1999, Kollegiatin vom 1. 10. 1999 bis 31. 12. 2000

Dipl.-Math. Chanh Dinh Nguyen, Stipendiat seit 1. 4. 2001

Forschungsthemen und erzielte Ergebnisse

Im Berichtszeitraum konzentrierten sich die durchgeführten Forschungsarbeiten der Arbeitsgruppe auf die Entwicklung, Analyse und Implementation adaptiver Finite-Elemente-Methoden, insbesondere von Techniken der Gebietszerlegung, und deren Anwendung in der Simulation technologischer Prozesse. Weitere Schwerpunkte waren die elektromagnetische Feldberechnung unter Verwendung curl-konformer Kantenelemente und Optimierungsverfahren für Systeme partieller Differentialgleichungen. Im einzelnen wurden die folgenden Ergebnisse erzielt:

(a) Adaptive Gebietszerlegungsverfahren auf nichtkonformen Gittern

Gebietszerlegungsverfahren zur numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen beruhen auf einer Zerlegung des Rechengebietes in Teilgebiete und ermöglichen bei Berücksichtigung der Kopplung auf den Teilgebietsrändern die simultane Lösung der Teilgebietsprobleme. Somit eignen sich derartige Verfahren sehr gut zur Implementation auf Rechnern paralleler Architektur. Insbesondere wurden Techniken für Mortar Finite Elemente Methoden bei Gebietszerlegungen mit nichtkonformen Gittern entwickelt, analysiert und implementiert (vgl. [13, 15-19, 28-30, 32, 34, 36-39, 41-43]).

(b) Numerische Simulation von Beschichtungsprozessen

Gegenstand dieses Projekts ist die Untersuchung der Strukturbildung bei der Beschichtung von Materialien mit Methoden der Molekularstrahlepitaxie einerseits und der ionengestützten Deposition andererseits. Dabei wird die numerische Simulation im mikroskopischen Bereich mit Verfahren der Molekularen Dynamik durchgeführt, auf makroskopischer Ebene unter Verwendung kontinuumsmechanischer Modelle in Gestalt nichtlinearer Depositionsgleichungen (vgl. [27]).

(c) Modellierung und Simulation elektrorheologischer Fluide

Elektrorheologische Fluide sind mikrostrukturierte Fluide in Gestalt von in elektrisch nicht leitfähigen Flüssigkeiten aufgelösten dielektrischen Partikeln. Unter dem Einfluss eines äusseren elektrischen Feldes richten sich diese Partikel aus und schliessen sich zu Ketten zusammen, wodurch die Viskosität des Fluides entscheidend beeinflusst wird. Die Modellierung solcher Fluide erfolgt im mikroskopischen Bereich auf der Grundlage von Methoden der Molekularen Dynamik, während auf makroskopischer Ebene kontinuumsmechanische Feldgleichungen wie etwa viskoplastische Bingham Fluid Modelle herangezogen werden. In der Arbeitsgruppe wurden vorrangig numerische Lösungsverfahren auf der Basis von Bingham Fluid Modellen entwickelt und implementiert (vgl. [7, 8, 11, 20, 21]).

(d) Modellierung und Simulation elektronischer Bauteile und Systeme

Layout und Design in Halbleitertechnologie gefertigter elektronischer Bauteile und Systeme erfordern eine effiziente Simulation des Betriebsverhaltens auf der Grundlage massgeschneiderter, physikalisch konsistenter Modelle, welche die Wechselwirkung elektrischer, optischer, thermischer und mechanischer Phänomene berücksichtigen. Die mathematische Modellbildung führt typischerweise auf gekoppelte Systeme partieller Differentialgleichungen. In der Simulation wurden

effiziente Lösungsverfahren auf der Grundlage von multilevel- und Gebietszerlegungsverfahren realisiert (vgl. [4, 9, 10, 18, 19]).

(e) *Numerische Berechnung elektromagnetischer Felder und Potentiale*

Zur Berechnung elektromagnetischer Felder und elektromagnetischer Potentiale, die durch die Maxwell'schen Gleichungen beschrieben werden, wurden adaptive Mehrgitter- und Gebietszerlegungsverfahren auf der Grundlage curl-konformer Kantenelementdiskretisierungen entwickelt, analysiert und implementiert (vgl. [1-3, 6, 14-17, 34]).

(f) *Optimierung von Systemen partieller Differentialgleichungen*

Zur Strukturoptimierung mit Nebenbedingungen an Designparameter und Zustandsvariable (letztere in Gestalt von partiellen Differentialgleichungen und Systemen derartiger Gleichungen) wurden primal-duale Newton-artige Innere-Punkte-Verfahren mit simultaner sequentieller quadratischer Programmierung (sogenannter "all-in-one approach") realisiert und auf die Topologieoptimierung von Bauteilen und Systemen der Hochleistungselektronik angewendet (vgl. [5, 17, 22-26]).

Stellung im Graduiertenkolleg

Im Berichtszeitraum ergaben sich Kooperationen mit der Arbeitsgruppe 1 (Kielhöfer/Maier-Paape) und der Arbeitsgruppe 4 (Hänggi/Linz).

Die Zusammenarbeit mit der Arbeitsgruppe 1 bezog sich auf die Untersuchung von Musterbildungen bei nichtlinearen Phasenfeldgleichungen vom Cahn-Hilliard und Allen-Cahn Typ (vgl. Dissertation E. Nash).

Eine Zusammenarbeit mit der Arbeitsgruppe 4 bestand auf dem Gebiet der Modellierung und Simulation der Schichtbildung bei amorphen Oberflächenwachstumsprozessen, die durch Cahn-Hilliard ähnliche Depositionsgleichungen beschrieben werden (vgl. Dissertation E. Nash).

Publikationen, die im Berichtszeitraum entstanden sind und in Zusammenhang mit dem Graduiertenkolleg stehen

- [1] Beck, R., Deuffhard, P., Hiptmair, R., Hoppe, R. H. W. and Wohlmuth, B., *Adaptive multi-level methods for edge element discretizations of Maxwell's equations*, Surveys of Math. in Industry **8**, 271-312 (1999).
- [2] Beck, R., Hiptmair, R., Hoppe, R. H. W. and Wohlmuth, B., *Residual based a posteriori error estimators for eddy current computation*, M²AN Math. Modelling and Numer. Anal. **34**, 159-182 (2000).
- [3] Beck, R., Hiptmair, R. and Wohlmuth, B., *Hierarchical error estimator for eddy current computation*, Proc. 3rd European Conf. on Numerical Mathematics and Advanced Applications, Jyväskylä (Finland), July 26 - 30, 1999 (Neittaanmäki, P. et al.; eds.), pp. 110-120, World Scientific, Singapore (2000).
- [4] Böhm, P., Gerstenmaier, Y. C., Hoppe, R. H. W., Iliash, Y., Mazurkevitch, G. and Wachutka, G., *Modeling and simulation of electrothermomechanical coupling phenomena in high power electronics*, erscheint in "High Performance Scientific and Engineering Computing. Methods, Developments, and Applications", Proc. Int. FORTWIHR Conf. 2001, Erlangen, March 12-14, 2001 (F. Durst and Chr. Zenger; eds.), Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2002.
- [5] Böhm, P., Hoppe, R. H. W., Mazurkevitch, G., Petrova, S., Wachutka, G. and Wolfgang, E., *Optimal design of high power electronic devices by topology optimization*, erscheint in "Mathematik - Schlüsseltechnologie für die Zukunft", Verbundprojekte zwischen Mathematik und Industrie, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2001.

- [6] Böhm, P., Wachutka, G. and Hoppe, R.H.W., *Modeling and simulation of the transient electromagnetic behavior of high power bus bars*, erscheint in "High Performance Scientific and Engineering Computing. Methods, Developments, and Applications", Proc. Int. FORTWIHR Conf. 2001, Erlangen, March 12-14, 2001 (F. Durst and Chr. Zenger; eds.), Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2002.
- [7] Böse, H., Hoppe, R.H.W. and Mazurkevitch, G., *Mathematical Modelling and numerical Simulation of Electrorheological Devices*, in "Smart Materials". Proc. 1st caesarium, Bonn, November 17-19,1999 (Hoffmann, K.-H.; ed.), pp. 39-50, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2001.
- [8] Böse, H., Hoppe, R.H.W. and Mazurkevitch, G., *Computer simulations of electrorheological fluid flows*, eingereicht bei J. Non-Newtonian Fluid Mech.
- [9] Dürndorfer, St., Gradinaru, V., Hoppe, R.H.W., König, E.-R., Schrag, G. and Wachutka, G., *Numerical simulation of microstructured semiconductor devices, transducers, and systems*, in "High Performance Scientific and Engineering Computing", Proc. "Int. FORTWIHR-Symposium", Munich, March 1998 (Bungartz, H., Durst, F.,and Zenger, Chr.; eds.), pp. 309-323, Lect. Notes in Comp. Sci. and Engrg. Vol. 8, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1999.
- [10] Dürndorfer, St., Gradinaru, V., Hoppe, R.H.W., König, E.-R., Schrag, G. and Wachutka, G., *Electrostatically driven micromembrane pumps*, Int. J. Appl. Electr. Mech., 1999.
- [11] Engelmann, B., Hiptmair, R., Hoppe, R.H.W. and Mazurkevitch, G., *Numerical simulation of electrorheological fluids based on an extended Bingham model*, Comput. Visual. Sci. 2, 211-219 (2000).
- [12] Engelmann, B., Hoppe, R.H.W., Iliash, Y., Kuznetsov, Y., Vassilevski, Y. and Wohlmuth, B., *Adaptive finite element methods for domain decomposition on nonmatching grids*, in "Parallel Solution of PDEs", IMA Volume in Mathematics and its Applications, Vol. 120 (P. Björstad and M. Luskin; eds.), pp. 57-83, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2000.
- [13] Engelmann, B., Hoppe, R.H.W., Iliash, Y., Kuznetsov, Y., Vassilevski, Y. and Wohlmuth, B., *Efficient parallel domain decomposition methods for fluidmechanical problems on non-matching grids*, in "Projects on the High Performance Computers of the Leibniz Computing Center" (Hegering, H.-G. et al.; eds.), Leibniz Computing Center, Munich, 2000.
- [14] Hiptmair, R. and Hoppe, R.H.W., *Multilevel methods for mixed finite element schemes in three dimensions*, Numer. Math. 82, 253-279 (1999).
- [15] Hoppe, R.H.W., *Mortar edge elements in R^3* , East-West J. Numer. Anal. 7, 159-173 (1999).
- [16] Hoppe, R.H.W., *Adaptive mortar edge elements in the computation of eddy currents*, Proc. Conf. "Analysis and Approximation of Boundary Value Problems", Jyväskylä (Finland), October 1998 (Neittaanmäki, P. et al.; eds.), pp. 83-96, Dept. Math. Inf. Techn., No. A 2/2000, Jyväskylä, 2000.
- [17] Hoppe, R.H.W., *Efficient numerical solution techniques in electromagnetic field computation*, erscheint in "Proc. Conf. ECCM 2001", Cracow, Poland, June 26-29, 2001.
- [18] Hoppe, R.H.W., Iliash, Y. and Mazurkevitch, G., *Domain decomposition methods in the design of high power electronic devices*, in "Multifield Problems. State of the Art" (M. Sändig, W. Schiehlen, and W. Wendland; eds.), pp. 169-182, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2000.
- [19] Hoppe, R.H.W., Iliash, Y. and Mazurkevitch, G., *Domain decomposition methods in high power electronics*, erscheint in "Proc. Europ. Congr. on Comput. Meth. in Appl. Sci. and

- Engrg.” (ECCOMAS 2000), Barcelona, September 11-14, 2000 (Onate,E. et al.;eds.), John Wiley & Sons, Chichester, 2000.
- [20] Hoppe, R. H. W. and Mazurkevitch, G., *Modeling and simulation of electrorheological devices*, in “Proc. 4th Summer Conf. on Numerical Modelling in Continuum Mechanics”, Prague, July 31 - August 4, 2000 (M. Feistauer, K. Kozel, and R. Rannacher; eds.), pp. 153-162, MATFYZPRESS, Prague, 2001.
- [21] Hoppe, R. H. W., Mazurkevitch, G., von Stryk, O. and Rettig, U., *Modeling, simulation, and control of electrorheological automobile devices*, in “Proc. Conf. Int. Symp. SFB 438”, Munich, June 30-July 2, 1999 (H.-J. Bungartz, R. H. W. Hoppe, and Chr. Zenger; eds.), pp. 251-276, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2000.
- [22] Hoppe, R. H. W. and Petrova, S., *Applications of the Newton interior-point method for Maxwell’s equations*, erscheint in “Proc. 16th IMACS World Congress”, Lausanne, Switzerland, August 2000.
- [23] Hoppe, R. H. W., Petrova, S. and Schulz, V., *Topology optimization of conductive media described by Maxwell’s equations*, erscheint in “Proc. 2nd Conf. on Numer. Anal. and Appl.”, Rouse (Bulgaria), June 11-15, 2000, Lect. Notes in Comp. Sci., Springer, 2001.
- [24] Hoppe, R. H. W., Petrova, S. and Schulz, V., *Topology optimization of high power electronic devices*, erscheint in “Proc. Conf. Oberwolfach Conference Optimal Control and Optimization”, Oberwolfach, June 5-9, 2000 (G. Leugering et al.; eds.), Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2001.
- [25] Hoppe, R. H. W., Petrova, S. and Schulz, V., *3D structural optimization in electromagnetics*, erscheint in “Proc. 13th Int. Conf. Domain Decomposition Methods and Applications”, Lyon, October 9-12, 2000 (M. Garbey et al.; eds.), 2001.
- [26] Hoppe, R. H. W., Petrova, S. and Schulz, V., *A primal-dual Newton-type interior-point method for topology optimization*, eingereicht bei JOTA, 2001.
- [27] Hoppe, R. H. W., Rauschenbach, B., Schweitzer, D. and Stritzker, B., *Parallel molecular dynamics simulations of deposition processes*, in “Projects on the High Performance Computers of the Leibniz Computing Center” (Hegering, H.-G. et al.; eds.), Leibniz Computing Center, Munich, 2000.
- [28] Krause, R. and Wohlmuth, B., *Nonconforming domain decomposition techniques for linear elasticity*, East-West J. Numer. Anal. **8**, 177-206 (2000).
- [29] Krause, R. and Wohlmuth, B., *A Dirichlet-Neumann type algorithm for contact problems with friction*, eingereicht.
- [30] Krause, R. and Wohlmuth, B., *Multigrid methods for mortar finite elements*, erscheint in “Proc. 6th European Multigrid Meeting”, Lecture Notes in Computer Science and Engineering, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2001.
- [31] Nguyen, Ch. D., *Motion of level sets with speed depending on mean curvature*, Diplomarbeit, Mathematisches Institut, Universität Tübingen, 2000.
- [32] Oswald, P. and Wohlmuth, B., *On polynomial reproduction of dual FE bases*, erscheint in “Proc. 13th Int. Conf. Domain Decomposition Methods and Applications”, Lyon, October 9-12, 2000 (M. Garbey et al.; eds.), 2001.
- [33] Paprzycki, M., Petrova, S. and Sanchez, J., *Implementing parallel elliptic solver on a Beowulf cluster*, in Proc. “Fifteenth Annual Conference on Applied Mathematics”, Univ. of Central Oklahoma, February 1999 (Stapleton, D.; ed.), pp.75-85, Electron. J. Diff. Eqns., Conf. 02, 1999.

- [34] Toselli, A., Widlund, O. and Wohlmuth, B., *Iterative substructuring methods for Maxwell's equations in two dimensions*, erscheint in Math. Comp., 2001.
- [35] Tran, D. V. and Nguyen, Ch. D., *Some stability results of viscosity solutions to Hamilton-Jacobi equations*, Preprint, Hanoi Institute of Mathematics, 2001.
- [36] Wieners, Chr. and Wohlmuth, B., *A general framework for multigrid methods for mortar finite elements*, erscheint in "Notes on Numerical Fluid Mechanics", Vieweg, Wiesbaden, 2001.
- [37] Wohlmuth, B., *A residual based error estimator for mortar finite element discretizations*, Numer. Math. **84**, 143-171 (1999).
- [38] Wohlmuth, B., *Hierarchical a posteriori error estimators for mortar finite element methods with Lagrange multipliers*, SIAM J. Numer. Anal. **36**, 1636-1658 (1999).
- [39] Wohlmuth, B., *Mortar finite elements for discontinuous coefficients*, ZAMM **79 S I**, 151-154 (1999).
- [40] Wohlmuth, B., *Multigrid methods for saddle point problems arising from mortar finite element discretizations*, ETNA **11**, 43-54 (2000).
- [41] Wohlmuth, B., *Discretization methods and iterative solvers based on domain decomposition*, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Vol. 17, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2001.
- [42] Wohlmuth, B. and Hoppe, R. H. W., *A comparison of a posteriori error estimators for mixed finite element discretizations*, Math. Comp. **68**, 1347-1378 (1999).
- [43] Wohlmuth, B. and Krause, R., *Multigrid methods based on the unconstrained product space arising from mortar finite element discretizations*, eingereicht bei SIAM J. Numer. Anal.

Diplomarbeiten, Dissertationen, Habilitationen, die im Berichtszeitraum abgeschlossen wurden und in Zusammenhang mit dem Graduiertenkolleg stehen

Diplomarbeiten:

- Steffen Hüster, *Stochastische Algorithmen zur Optimierung der Auslegung einer technischen Anlage*, 1999.
- Winfried Schindele, *Adaptive Finite-Elemente-Verfahren für Zwei-Phasen-Stefan Probleme*, 1999.
- Martin Schmied, *Eine Branch and Bound Methode zur Soft-Decision Decodierung binärer systematischer Blockcodes*, 1999.
- Manuel Kinzler, *Numerische Verfahren zur Bewertung bedingter Termingeschäfte amerikanischen Typs*, 2000.

Dissertation:

- Eva Nash, *Finite-Elemente und Spektral-Galerkin Verfahren zur numerischen Lösung der Cahn-Hilliard Gleichung und verwandter nichtlinearer Evolutionsgleichungen*, Shaker-Verlag, Aachen, 2001.

Habilitationen:

- Marian Slodicka, *Finite elements in modeling of flow through porous media*, 1999.
- Barbara Wohlmuth, *Discretization methods and iterative solvers based on domain decomposition*, 2000.

ARBEITSGRUPPE 4: NICHTLINEARE PHYSIK KOMPLEXER SYSTEME

Prof. Dr. Peter Hänggi

Priv.-Doz. Dr. Stefan J. Linz

Priv.-Doz. Dr. Peter Reimann

Dr. Lars Callenbach, Stipendiat vom 1. 6. 1998 bis 31. 5. 2001, seit 1. 6. 2001 Kollegiat

Dr. Ralf Eichhorn, Stipendiat vom 1. 4. 1997 bis 31. 3. 2000, seit 1. 4. 2000 Kollegiat

Dr. Igor Goychuk, Kollegiat seit 1. 4. 2001

Dr. Sigmund Kohler, Kollegiat seit 1. 10. 1996

Dr. Martin Raible, Kollegiat seit 1. 4. 1998

Dr. Michael Thorwart, Kollegiat vom 1. 4. 1997 bis 15. 3. 2001

Dipl.-Phys. Andreas Hoffmann, Kollegiat seit 1. 2. 2000

Dipl.-Phys. Jörg Lehmann, Kollegiat seit 1. 4. 2001

Dipl.-Phys. Bernd Reinhard, Kollegiat vom 1. 8. 1997 bis 31. 8. 1999, Stipendiat vom 1. 9. 1999 bis 31. 8. 2001

Dipl.-Phys. Gerhard Schmid, Kollegiat seit 1. 4. 2001

Forschungsthemen

Wie schon im Fortsetzungsantrag dieses Graduiertenkollegs vom September 1998 ausgeführt, wurden von der Arbeitsgruppe 4 als allgemeine Forschungsschwerpunkte innerhalb des Graduiertenkollegs (a) *Dynamik granularer Materialien*, (b) *Nichtlineare Dynamik von Modellsystemen* (autonom und nichtautonom), (c) *Oberflächenwachstumsprozesse*, (d) *Stochastische Dynamik in multistabilen Systemen* und (e) *zeitabhängige Quantensysteme* definiert und innerhalb des Berichtszeitraumes bearbeitet. Aufgrund aktueller Entwicklungen sind insbesondere in Teil (b) zusätzlich Synchronisationsphänomene bei chaotischen Systemen und in Oszillatoren unter Einfluss von Rauschen hinzugekommen.

Ergebnisse

Im Detail sieht unsere Bilanz wie folgt aus:

(a) Dynamik granularer Materialien

Innerhalb dieses Themengebietes wurden im wesentlichen drei Aspekte untersucht.

Als erster Aspekt wurde die globale Theorie von Lawenströmungen in rotierenden Trommeln, die zum Teil vom ehemaligen Stipendiaten W. Hager (ausgeschieden während der ersten Antragsphase) untersucht wurde, weiter ausgebaut. Insbesondere gelang es, aufbauend auf einem stochastischen nichtlinear-dynamischen Lawinen-Modell [Hager, Linz, Hänggi, Europhys. Lett. **40** (1997), 393] erstmals eine theoretische Erklärung für den Hysterese-Effekt des Übergangs von Lawinen zu kontinuierlicher Strömung unter adiabatischer Änderung der Rotationsgeschwindigkeit der Trommel zu finden [1]. Dieser Effekt ist experimentell wohlbekannt, konnte aber bis dato *nicht* in molekulardynamischen Simulationen bestätigt werden. Unser Modell zeigt, dass die Stärke der während der Strömung auftretenden lokalen Geschwindigkeitsfluktuationen (die von der Elastizität der granularen Partikel abhängt) entscheidend ist: Bei zu elastischen Teilchen verschwindet der Hysterese-Effekt [1].

Als zweiter Aspekt wurde die Verfeinerung der Modellierung von Oberflächenströmungen auf lokale Freiheitsgrade (lokale Lawinen) angegangen, indem eine Art Domino-Modell von geeignet verkoppelten kleinskaligen Lawinen aufgestellt wurde und numerisch analysiert wird. Diese Problemstellung wird zur Zeit von dem Kollegiaten A. Hoffmann im Rahmen seiner Dissertation untersucht (vgl. Bericht in Teil C). Erste Ergebnisse dieses Domino-Modells für granulare Lawinen deuten darauf hin, dass (1) der Hysterese-Effekt bei Böschungsströmungen weiter theoretisch

untermauert werden kann und (2) die Details des experimentell gefundenen Leistungsspektrums der globalen Lawinen [Jaeger et al., Phys. Rev. Lett. **62** (1990), 40] als kollektiver Effekt der Interaktion der kleinskaligen Lawinen verstanden werden kann.

Dritter Aspekt war die theoretische Erklärung des Verdichtungsverhaltens granularer Materialien bei periodischem Rütteln. Da für dieses Projekt kein adäquater Stipendiat bzw. Kollegiat gefunden werden konnte, wurde diese Themenstellung von einem der Antragsteller in Zusammenarbeit mit einer Diplomandin (Frau A. Döhle) weitergeführt. Insbesondere konnte ein elementares makromechanisches Modell für die ensemble-gemittelte, rüttel-induzierte Kompaktion in Form einer physikalisch motivierten nichtlinearen Relaxatorgleichung für die Packungsdichte gefunden werden [2], das (1) den Kompaktionsprozess als Kombination von Hohlraumdiffusion bei noch lockerer Packung und kollektiver Reorganisation bei schon dichter Packung interpretiert, (2) die experimentellen Ergebnisse der Gruppe Jaeger/Nagel [Knight et al., Phys. Rev. **E 51** (1995), 3957] im Detail korrekt beschreibt und (3) ein früheres phänomenologisches Modell, das auf Elementarität der stroboskopischen Dynamik des Kompaktionsprozesses beruht [Linz, Phys. Rev. **E 54** (1996), 2925], untermauert. Mit Hilfe einer geeigneten Erweiterung dieses Modells [3], die auch die Stochastik der Packungsdichte bei individuellen Kompaktionsvorgängen berücksichtigt, konnten auch wichtige Elemente des experimentell gefundenen Leistungsspektrums [Nowak et al., Phys. Rev. **E 57** (1998), 1971] erklärt werden. Die entsprechenden Arbeiten wurden jüngst in einem eingeladenen Überblicksartikel [4] für die Phys. Blätter zusammengefasst.

(b) *Nichtlineare Dynamik von Modellsystemen*

Dieser Themenkomplex umfasst im wesentlichen dynamische Systeme, deren Systemdynamik schon kompliziert genug ist, um in Abhängigkeit der Kontrollparameter komplexes Lösungsverhalten wie zum Beispiel Grenzzyklen, Quasiperiodizität und Irregularität (Chaos) zu zeigen. Dabei wurde zweigleisig vorgegangen.

(b1) *Autonome dynamische Systeme*

Grundlegende Problemstellung in diesem Teilbereich war die Identifikation, Klassifikation, Analyse und Anwendung elementarer chaotischer Flüsse. Gibt man sich die funktionale Form eines beliebigen nichtlinearen, 3D dynamischen Systems vor, ist zunächst nicht (ohne den Einsatz numerischer Analyse) entscheidbar, ob dieses System überhaupt chaotisches Verhalten zeigen kann, und wenn ja, in welchen Kontrollparameter-Bereichen. Darüber hinaus ist i. allg. nicht klar, welche Art und wieviel Nichtlinearität notwendig ist, um auch in funktional einfachen 3D Systemen chaotisches Verhalten zu generieren. Fortschritte zu einem tieferen Verständnis dieser Fragestellungen wurden durch Betrachtung der breiten Unterklasse nichtlinearer 3D Systeme, die sich auf autonome, explizite, nichtlineare, gewöhnliche Differentialgleichungen dritter Ordnung $\ddot{x} = J(x, \dot{x}, \ddot{x})$ ('jerky dynamics') reduzieren lassen, erreicht. Im Rahmen der Dissertation des Stipendiaten R. Eichhorn (vgl. Bericht in Teil C) wurden folgende wesentliche Punkte eingehend untersucht: (1) welche 3D dynamischen Systeme sind auf jerky dynamics reduzierbar [5,6]; (2) was sind die Grundklassen von chaotischen jerky dynamics mit quadratischen Nichtlinearitäten [5]; (3) welche Szenarien führen zu chaotischem Verhalten in den einfachsten Klassen JD_1 und JD_2 [7]; (4) unter welchen Bedingungen erhalten Transformationen von Vektorfeldern (insbesondere auch solche von 3D Systemen auf jerky dynamics) die Vorzeichen und die Größen der zur Identifikation von chaotischem Verhalten grundlegenden Lyapunov-Exponenten [8].

Parallel zu diesen Arbeiten wurde von einem der Antragsteller, im wesentlichen in Zusammenarbeit mit J.C. Sprott (University of Wisconsin), die allgemeinere Problemstellung der Identifikation, Klassifikation und Analyse elementarer chaotischer jerky dynamics mit *beliebiger* Nichtlinearität (z.B. stückweise stetig oder mit bestimmten Symmetrie-Eigenschaften) angegangen [9-12]. Dabei konnte insbesondere das einfachste chaotische System mit einer quasilinearen Betragsnichtlinearität gefunden, analysiert und sogar analytisch gelöst werden [9]. Darüber hinaus gelang es (aufbauend auf früheren Ideen [Linz, Am. J. Phys. **66** (1998), 1109]), für spezielle Klassen von

jerky dynamics detaillierte analytische Ausschlusskriterien für chaotisches Verhalten abzuleiten [10]. Ein erster Überblick zu diesen Arbeiten wurde in [11] gegeben, eine ausführliche Diskussion ist in Vorbereitung [12].

Als konkrete Anwendung wurde im Rahmen des ersten Teils der Dissertation des Stipendiaten L. Callenbach (vgl. Bericht in Teil C) der Fragestellung der Synchronisierbarkeit chaotischer jerky dynamics nachgegangen: Wie kann man es durch geeignete Verkopplung zweier identischer chaotischer Systeme erreichen, dass die Dynamik des einen Systems auf die des anderen Systems gezwungen wird. Diese Problemstellung für beliebige Vektorfelder und ihre Anwendung auf private (halbwegs sichere) Nachrichtenübermittlung sind ein zur Zeit in der Literatur höchst aktuell diskutiertes Thema. Hier zeigte es sich, dass speziell chaotische jerky dynamics (im Gegensatz zu der allgemeineren Struktur von 3D Vektorfeldern) dadurch ausgezeichnet sind, dass sie unter ganz allgemeinen Bedingungen *stets* durch einfache Varianten der in der Literatur vorgeschlagenen BK-Kopplung und Aktiv-Passiv-Dekomposition synchronisierbar sind [13]. Speziell konnten analytische Schranken für die Geschwindigkeit der Synchronisation und Methoden der Beschleunigung der Synchronisation bei beliebiger Wahl der zugrundeliegenden jerky dynamics angegeben und am Modell [9] im Detail dargestellt und überprüft werden.

(b2) Nichtautonome dynamische Systeme

Dieser Themenbereich, der im wesentlichen Eigenschaften periodisch getriebener nichtlinearer Oszillatoren umfasst, gliedert sich in zwei Problemstellungen.

Im Rahmen der Dissertation des Stipendiaten B. Reinhard (vgl. Bericht in Teil C) wurden die Eigenschaften einer allgemeinen Klasse konzeptionell besonders einfacher, parametrisch modulierter Differentialgleichungen, der nichtlinearen Hill-Kingdon-Gleichung $\ddot{r} + \gamma\dot{r} + (1 + 2\eta f(2t))r^{-\alpha} = 0$ mit $\alpha \neq -1$, $r > 0$ reell, $f(2t)$ periodisch, η Antriebsamplitude und γ Reibung, untersucht [14]. Diese Klasse von Gleichungen modelliert die Dynamik von Ionen in verschiedenartigen Konfigurationen von Ionenfallen (z.B. für $\alpha = 1$ die dynamische Kingdon-Falle). Dabei gelang es mit aufwendigen analytischen Techniken die Grunddynamik (Grenzzyklen) und deren Stabilität asymptotisch korrekt zu berechnen und auf verschiedene Fallentypen anzuwenden. Darüber hinaus konnte auch (mittels subtiler Transformationstechniken auf eine iterierte Abbildung) mathematisch sauber bewiesen werden, dass die allgemeine gedämpfte Dynamik von Teilchen in solchen Fallenkonfigurationen nicht divergieren kann [14]. Als weiterer Aspekt wurde von B. Reinhard das schon im Fortsetzungsantrag von 1998 angesprochene Problem der mathematisch sauberen Formulierung der in der Physik der Ionenfallen gängigen Pseudopotential-Approximation (Trennung der Zeitskalen von schneller und langsamer Dynamik in oszillierenden Feldern) und die Limitierungen dieser Methode im Vergleich zu systematischen Entwicklungen ('averaging' und 'multiple scales' Methoden) untersucht [15].

Im zweiten Teil der Dissertation des Stipendiaten L. Callenbach (vgl. Bericht in Teil C) wurden die jüngst in der Literatur diskutierten Konzepte der Phasen- und Frequenz-Synchronisation von überdämpften, verrauschten, modulierten Systemen erstmalig auf Systeme mit *Trägheit* (additiv periodisch modulierte, harmonische und bistabile Oszillatoren mit additivem Rauschen) systematisch erweitert. Hier wurde insbesondere der Unterschied zwischen Frequenz- und Phasensynchronisation (anhand der Rice-Frequenz und der Hilbert-Frequenz) in solchen Systemen geklärt. Ausserdem wurden die Parameterbereiche identifiziert, bei denen stochastische Resonanz auftreten kann [16] und untersucht, inwieweit stochastische Resonanz mit Phasensynchronisation in Zusammenhang gebracht werden kann. Es zeigt sich, dass das Phänomen der stochastischen Resonanz nicht notwendigerweise eine Phasensynchronisation bedingt.

(c) Oberflächenwachstumsprozesse

Dieser Themenkreis umfasst die theoretisch-physikalische Modellierung sowie mathematische und numerische Analyse von nichtlinearen stochastischen Feldgleichungen, die die raum-zeitliche Evo-

lution der Oberflächenmorphologie bei Wachstumsprozessen von amorphen Schichten beschreiben. Diese Themenstellung wurde vom Kollegiaten M. Raible (vgl. Bericht in Teil C) im Rahmen seiner Dissertation und der nachfolgenden Arbeit als Postdoktorand im Projekt A1 des SFB 438 bearbeitet. Aufbauend auf einer Kombination von Modellen für die verschiedenen Diffusions- und Relaxationsmechanismen der deponierten Partikel und systematischer Gradienten-Entwicklung gelang es dabei erstmals, eine *quantitativ an experimentellen Daten validierbare* Depositionsgleichung abzuleiten und diese im Hinblick auf Strukturbildung der wachsenden Oberfläche systematisch numerisch und teilweise auch analytisch auszuwerten [17-21].

(d) *Stochastische Dynamik in multistabilen Systemen*

Wir haben im wesentlichen vier der bereits im vorangehenden Fortsetzungsantrag angesprochenen sowie sich daraus weiterentwickelte Themenkreise intensiviert untersucht. Gegenüber unseren ursprünglichen Fragestellungen ergeben sich damit zwei zusätzliche Punkte [(d1) und (d3)] und die ursprünglichen Punkte (d1) und (d2) werden nun zu (d2) bzw. (d4).

(d1) *Transport in periodischen Strukturen*

Wir haben sowohl *gerichteten* als auch *diffusiven* rauschinduzierten Transport in periodischen Strukturen fernab vom Gleichgewicht betrachtet (sog. Brownsche Motoren, bei gebrochener räumlicher Symmetrie auch 'Ratscheneffekt' genannt).

In [22] stellen wir ein neues, von uns patentiertes Ratschenkonzept vor, das in Zusammenarbeit mit Experimentalphysikern am Max-Planck-Institut für Mikrostrukturphysik in Halle gezielt auf experimentelle Realisierung von gerichtetem Transport hin entwickelt wurde. Des weiteren haben wir die Untersuchung der von uns eingeführten Modellklasse der sog. Rüttelratschen [Bartussek, Hänggi und Kissner, Europhys. Lett. **28** (1994), 459] mit der Arbeit [23] fortgesetzt. In [24] untersuchen wir den Ratscheneffekt für ein massives gedämpftes Brownsches Teilchen unter dem simultanen Einfluss von thermischem weissen Rauschen und nicht-thermischen Fluktuationen (Ornstein-Uhlenbeck-Prozess). Insbesondere konnten wir zeigen, dass mit Hilfe des Ratscheneffektes Teilchensorten mit unterschiedlichen Massen in entgegengesetzte Richtungen transportiert und somit die Teilchen nach ihrer Masse sortiert werden können. Eine neue Symmetrieklasse, die das Auftreten eines Ratscheneffektes ausschliesst, wurde in [25] identifiziert und im Einzelnen diskutiert. Ein ausführlicher Übersichtsartikel [26] zum Gebiet der Brownschen Motoren ist zur Publikation eingereicht.

Im Rahmen unserer Studien von diffusivem Transport in periodischen Systemen stellen wir in [27] ein Modell mit periodischem Antrieb vor, in dem der Diffusionskoeffizient kontrolliert und beliebig verstärkt werden kann. Eine gigantische Beschleunigung der freien (thermischen) Diffusion in einem statischen, verkippten periodischen Potential wurde kürzlich in [28] aufgezeigt.

Ein für die Modellierung von Dissipationseffekten und thermischen Fluktuationen in allen diesen Modellen zentrales Eindeutigkeitstheorem haben wir in [29] abgeleitet: Wann immer man davon ausgehen kann, dass die thermischen Fluktuationskräfte additiv an ein System ankoppeln und die Dissipation ein lineares Funktional der Systemgeschwindigkeit ist, dann sind alle statistischen Eigenschaften dieser Fluktuationen eindeutig festgelegt, unabhängig von allen weiteren mikroskopischen Details der thermischen Umgebung.

(d2) *Gekoppelte Brownsche Motoren*

Für ungekoppelte Brownsche Motoren sind die beiden fundamentalen Bedingungen für das Auftreten eines Ratscheneffektes eine (wie auch immer geartete) Störung des thermodynamischen Gleichgewichts und eine systemintrinsische Asymmetrie. Unsere Idee war nun, dass man in verkoppelten Brownschen Motoren die zweite Bedingung vielleicht fallenlassen könnte: statt der eingebauten Asymmetrie könnte sich ein *symmetrisches* periodisches System die für den Ratscheneffekt notwendige Asymmetrie durch *spontane Symmetriebrechung* selbst erzeugen. In Zusammenarbeit mit dem Kollegiaten J. Lehmann haben wir in den Arbeiten [30-33] anhand ver-

schiedener Modellklassen gezeigt, dass sich diese grundlegenden Ideen in der Tat realisieren lassen und sogar bemerkenswert robust gegen zahlreiche Abänderungen der Modelle sind. Als weitere, bemerkenswerte Effekte in solchen Systemen haben wir zudem spontane Oszillationen sowie ein sehr verblüffendes Antwortverhalten auf eine externe statische Kraft, nämlich sog. *anomale* Hystereseschleifen und sog. *absolute negative Mobilität* gefunden. Alle diese Phänomene können ausschliesslich in Nichtgleichgewichtssystemen auftreten und mit Ausnahme des letztgenannten Effektes sind sie auch nur als kollektive Phänomene aufgrund von Wechselwirkung denkbar.

(d3) Austrittszeiten aus metastabilen Zuständen

Im Rahmen der Diplomarbeit des Kollegiaten G. Schmid haben wir in [34] gezeigt, dass Kramers Fluss-über-Population Rate für beliebige zeithomogene stochastische Prozesse identisch ist zum Inversen der entsprechenden Mittleren-Entweich-Zeit (mean first passage time). Des weiteren untersuchten wir in [35] ein überdämpftes Teilchen, das eine Potentialbarriere mit Hilfe von dichotomen Potentialfluktuationen überwindet. Ein analytisch geschlossener Ausdruck für die Entweich-Rate für beliebige Rauschstärken wurde abgeleitet, der zeigt, dass eine Kontrolle der Rate mittels eines asymmetrischen Rauschens mit verschwindendem Mittelwert möglich ist.

Im Rahmen der Diplomarbeit des Kollegiaten J. Lehmann haben wir in [36,37] den thermisch aktivierten Zerfall metastabiler Zustände unter dem Einfluss von periodischen Modulationen des Potentialprofils diskutiert. Mit Hilfe von Pfadintegralmethoden wurden asymptotisch exakte Approximationen für die Übergangsraten im Limes schwachen Rauschens abgeleitet und anhand sehr präziser numerischer Resultate verifiziert.

Zusammen mit [38] repräsentieren [34,35] auch die Weiterentwicklungen unserer fortlaufenden Untersuchungen der sog. Resonanz-Aktivierung im vorliegenden Berichtszeitraum (ein Übersichtsartikel zu diesem Thema ist [P. Reimann und P. Hänggi, Lecture Notes in Physics **484** (1997), 127]). Sowohl die Arbeiten [36,37] als auch der nachfolgende Programmpunkt (d4) ist konzeptionell und auch methodisch ebenfalls eng damit verwandt.

(d4) Polychromatische stochastische Resonanz

Der Effekt der stochastischen Resonanz – dem Phänomen einer anomalen Verstärkung der Signalübertragung mit *zunehmender* Rauschstärke [39] – wurde bisher vordringlich mit rein periodischen Störungen untersucht. Im Rahmen der nichtlinearen Effekte für das stochastische Resonanzphänomen haben wir polychromatische Störungen mit rationalen Frequenzverhältnissen bezüglich der Verstärkung von höheren Harmonischen und deren Mischfrequenzen untersucht. Von besonderem Interesse ist der Effekt des harmonischen Mischens zwischen ganzzahligen Frequenzkomponenten. In diesem Zusammenhang wurde von G. Schmid, einem jetzigen Kollegiaten, in seiner Diplomarbeit die spektrale Verstärkung für harmonische Mischsignale systematisch untersucht. Hierbei ergibt sich die Möglichkeit für eine *a priori Kontrolle* der stochastischen Resonanz. Diese Kontrolle der stochastischen Resonanz wurde theoretisch wie auch experimentell an nichtlinearen Schwellensystemen vom Typ eines Schmitt-Triggers von uns im Rahmen einer sehr erfolgreichen Kollaboration mit ausländischen Gruppen realisiert [40,41]. Mit unserem Kollegiaten Igor Goychuk haben wir ein neues Szenario für parallele Übertragung von Quanteninformation mittels stochastischer Resonanz entdeckt [42]. Dieses Teilgebiet trägt ein gewichtiges Potential für Anwendungen auf dem Gebiet der Quanten-Informationsverarbeitung. In einer ersten Arbeit haben wir die effektive Kontrolle der Kohärenz mittels zeitabhängiger Steuerfelder an einem sog. Qubit (einem 2-Niveau Atom) explizit demonstriert [43].

(e) Zeitabhängige Quantensysteme

Mit der Arbeit [44] setzten wir unsere in [Reimann, Grifoni, Hänggi, Phys. Rev. Lett **79** (1997), 10] begonnenen Untersuchungen zur quantenmechanischen Dynamik eines Brownschen Teilchens in einem periodisch gekippten Ratschenpotential fort. Unsere theoretischen Voraussagen wurden in [Linke et al., Science **286** (1999), 2314] erstmals experimentell bestätigt. In zwei 'Feature

Articles' [45,46] geben wir eine Übersicht über diese und weitere eng damit verwandte experimentelle und theoretische Arbeiten. Eine neue Richtung ist die Thematik eines Brownschen Motors der *ohne* dissipative Kräfte Teilchen zu transportieren vermag, d.h. sogenannte nicht-autonome Hamiltonsche Brownsche Motoren. Dieses Gebiet birgt höchst interessante Probleme, die die Struktur von Hamiltonschem Chaos und damit verbunden die mathematisch anspruchsvolle Frage nach Ergodizität und (schwachem) Mischen umfasst. In der Arbeit [46] haben wir den gegenwärtigen Stand resümiert und gleichzeitig minimale Quanten-Hamiltonsche Motoren vorgestellt.

Im Rahmen der Promotionsarbeit des Kollegiaten M. Thorwart (vgl. Bericht in Teil C) wurde die Zuverlässigkeit der dabei benutzten numerischen, sog. quasiadiabatischen Propagator-Pfadintegral-Methode (QUAPI) durch Vergleich mit einem analytisch lösbaren Referenzsystem untersucht [47]. Des weiteren ist es uns gelungen verallgemeinerte Mastergleichungen mit Hilfe des Influenzformalismus und Instanton-ähnlichen Methoden für getriebene, dissipative *räumlich kontinuierliche* Quantensysteme im Bereich *starker Kopplung* abzuleiten [48,49]. Auf der Basis dieser Ergebnisse ist es nun erstmals möglich, analytische Resultate für Multi-Level Systeme (d.h. 'beyond Spin-Boson-Limit') und volle Potentialsysteme über das Regime einer schwachen Ankopplung (dem Gültigkeitsbereich der berühmten Bloch-Redfield Gleichung) hinaus analytisch zu bearbeiten!

Stellung im Graduiertenkolleg

Wie schon im Fortsetzungsantrag von 1998 prognostiziert, haben sich die engen Verbindungen zu den Arbeitsgruppen 1 (Kielhöfer/Maier-Paape), 2 (Aulbach/Colonus) und 3 (Hoppe) auch in der zweiten Phase des Graduiertenkollegs weiter vertieft.

Insbesondere im Rahmen der Problemstellung der stochastischen Feldgleichungen für Oberflächenwachstumsprozesse [Teil (c)] haben sich die sehr engen Verbindungen zur Arbeitsgruppe 1 (Kielhöfer/Maier-Paape) bis hin zu konkreter Interaktion zwischen den Arbeitsgruppen entwickelt, wobei von Seiten der Mathematik hier tiefere Einsichten in die Existenz von Lösungen der von unserer Seite modellierten und analysierten partiellen Differentialgleichungen geliefert wurden. Besonders hervorzuheben ist dabei, dass eine konkrete, interdisziplinäre Zusammenarbeit zwischen den Stipendiaten Blömker, Gugg (Arbeitsgruppe 1/Kielhöfer) und unserem Kollegiaten Raible bzgl. der Existenz von Lösungen bei einem bestimmten Spezialfall einer nichtlinearen Wachstumsgleichung zustande kam, die schliesslich in einer gemeinsamen Publikation mündete. Mit der Arbeitsgruppe 2 (Aulbach/Colonus) besteht ein äusserst reger Austausch in Bezug auf alle mathematischen Fragen, die Projekte zu autonomen und nichtautonomen dynamischen Systemen, Chaos und Ergodizität betreffen. Insbesondere mit Prof. Colonus ergaben sich ganz konkret enge Verknüpfungen bei den kontrolltheoretischen Aspekten von Synchronisationsproblemen. Die enge Verbindung zur Arbeitsgruppe 2 manifestiert sich auch in der Übernahme von Zweitgutachten von Professoren der Arbeitsgruppe 2 bei Dissertationen der Stipendiaten unserer Arbeitsgruppe (Eichhorn: Gutachter Linz & Aulbach; Callenbach: Gutachter: Hänggi & Colonus; Reinhard: Gutachter: Linz & Aulbach [geplant]). Auch durch die in Teil (e) erwähnten Fragestellungen in Bezug auf die Struktur von Hamiltonschem Chaos und dessen Ergodizität und Mischverhalten ergibt sich eine natürliche enge Zusammenarbeit mit der Arbeitsgruppe 2. Genauso bestehen zur Arbeitsgruppe 3 (Hoppe) rege und enge Kontakte zu numerischen Fragen, hier insbesondere, was 'state of the art' Integration partieller Differentialgleichungen (vgl. unser Projekt zum Oberflächenwachstum in (c)) mittels alternativer Integrationsmethoden (Spektral-Galerkin/Finite Elemente) betrifft. Hervorzuheben ist, dass als 'spin-off' der Aktivitäten zu stochastischen Feldgleichungen im Graduiertenkolleg ein gemeinsames Drittmittel-Projekt im SFB 438 (A1, Projektleiter: Hänggi, Linz, Hoppe) zur Simulation und Analyse von Depositionsgleichungen bei manipulierten Depositionsbedingungen bewilligt wurde.

Unsere Thematik (d) 'Stochastische Dynamik in multistabilen Systemen' ist naturgemäß sehr eng

verknüpft mit den in der Arbeitsgruppe 2 (Aulbach/Colonius) bearbeiteten Problemkreisen (a) 'Berechnung von Kontrollmengen' und (b) 'Beziehung zu stochastischen Systemen'. Insbesondere sind die vom Stipendiaten T. Gayer der Arbeitsgruppe 2 im Rahmen der kontrolltheoretischen Analyse der Escape-Gleichung betrachteten stochastischen Dynamiken weitgehend identisch mit den von uns in (d3) 'Austrittszeiten aus metastabilen Zuständen' untersuchten Systemen. Die z.T. sehr ähnlichen, z.T. aber auch komplementären Fragestellungen und Methoden sind eine natürliche Basis für kontinuierliche, sehr rege und aufschlussreiche Diskussionen. Des weiteren spielen in der bereits oben genannten, von Prof. Hänggi und Prof. Colonius gemeinsam betreuten Dissertation des Stipendiaten L. Callenbach, neben dem erwähnten synchronisationstheoretischen Aspekt auch Konzepte und Methoden der stochastischen Prozesse eine zentrale Rolle.

Ein weiterer, überraschender methodischer Überlapp mit den Arbeitsgruppen 1 (Kielhöfer/Maier-Paape) und 6 (Eckern/Ziegler) hat sich erst kürzlich, anlässlich unserer Klausurtagung auf Schloss Reisenburg (7./8. Mai 2001), ergeben: Die vom Stipendiaten N. Tzoukmanis der Arbeitsgruppe 1 benutzte mathematische Modellierung von Phasenübergängen (z.B. ein Interface zwischen Martensit und Austenit) als nichtlokales Variationsproblem und die darauf aufbauenden Approximationsstrategien sind konzeptionell sehr eng verwandt mit unserem in (e) 'Zeitabhängige Quantensysteme' standardmässig benutzten sog. Influenzfunktionalformalismus, der wiederum auch in der Arbeitsgruppe 6 als ein Standardwerkzeug angewendet wird.

Publikationen, die im Berichtszeitraum entstanden sind und in Zusammenhang mit dem Graduiertenkolleg stehen

- [1] S.J. Linz, W. Hager und P. Hänggi, *Hysteretic transition between avalanches and continuous flow in rotated granular systems*, CHAOS **9** (1999), 649.
- [2] S.J. Linz und A. Döhle, *Minimal relaxation law for compaction of tapped granular matter*, Phys. Rev. **E 60** (1999), 5737.
- [3] A. Döhle und S.J. Linz, *Compaction of tapped granular matter: A mean-field model and its Langevin extension*, Adv. Geotechn. Engineering & Tunneling **3** (2000), 235.
- [4] S.J. Linz, *Kompaktionsdynamik granularer Materie*, eingeladener Artikel für Phys. Blätter, eingereicht.
- [5] R. Eichhorn, S.J. Linz und P. Hänggi, *Transformations of nonlinear dynamical systems to jerky motion and its application to minimal chaotic flows*, Phys. Rev. **E 58** (1998), 7151.
- [6] R. Eichhorn, S.J. Linz und P. Hänggi, *Classes of dynamical systems being equivalent to a jerky motion*, Z. angew. Math. Mech. **79** (1999), S287-288.
- [7] R. Eichhorn, S.J. Linz und P. Hänggi, *Simple polynomial classes of chaotic jerky dynamics*, Chaos, Solitons & Fractals **13** (2001), 1.
- [8] R. Eichhorn, S.J. Linz und P. Hänggi, *Transformation invariance of Lyapunov exponents*, Chaos, Solitons & Fractals **12** (2001), 1377.
- [9] S.J. Linz und J.C. Sprott, *Elementary chaotic flow*, Phys. Lett. **A 259** (1999), 240.
- [10] S.J. Linz, *No-chaos criteria for certain jerky dynamics*, Phys. Lett. **A 275** (2000), 204.
- [11] J.C. Sprott und S.J. Linz, *Algebraically simple chaotic systems*, Int'l J. Chaos Theory & Appl. **5(2)** (2000), 3.
- [12] S.J. Linz und J.C. Sprott, *Identification and classification of simple chaotic flows*, in Vorbereitung.
- [13] L. Callenbach, S.J. Linz und P. Hänggi, *Synchronization of simple chaotic flows*, Phys. Lett. **A**, im Druck.

- [14] B. Reinhard, S.J. Linz und P. Hänggi, *Nonlinear Hill equation*, zur Publikation eingereicht bei Phys. Rev. **A**.
- [15] B. Reinhard, S.J. Linz und P. Hänggi, *Particle motion in oscillating fields - pseudopotential and averaging*, in Vorbereitung.
- [16] L. Callenbach, P. Hänggi, S.J. Linz, J. Freund und L. Schimansky-Geier, *Phase synchronization of noisy oscillators*, in Vorbereitung.
- [17] M. Raible, S.J. Linz und P. Hänggi, *Amorphous thin film growth: minimal deposition equation*, Phys. Rev. **E 62** (2000), 1691.
- [18] M. Raible, S.G. Mayr, S.J. Linz, M. Moske, P. Hänggi und K. Samwer, *Amorphous thin film growth: theory compared with experiment*, Europhys. Lett. **50** (2000), 61.
- [19] S.J. Linz, M. Raible und P. Hänggi, *Stochastic field equation for amorphous surface growth*, Lect. Notes Phys. **557** (2000), 473.
- [20] M. Raible, S.J. Linz und P. Hänggi, *Amorphous thin film growth: effects of density inhomogeneities*, Phys. Rev. **E 64** (2001), im Druck.
- [21] S.J. Linz, M. Raible und P. Hänggi, *Amorphous thin film growth: modeling and pattern formation*, Adv. Solid State Phys. **41** (2001), im Druck.
- [22] C. Kettner, P. Reimann, P. Hänggi und F. Müller, *Drift Ratchet*, Phys. Rev. E **61** (2000), 312.
- [23] P. Reimann, *Rocking Ratchets at High Frequencies*, in “Stochastic Processes in Physics, Chemistry and Biology”, Lecture Notes in Physics, Vol. 557, edited by J.A. Freund and T. Pöschel, Springer, Berlin 2000.
- [24] B. Lindner, L. Schimansky-Geier, P. Reimann, P. Hänggi und M. Nagaoka, *Inertia Ratchets: A Numerical Study Versus Theory*, Phys. Rev. E. **59** (1999), 1417.
- [25] P. Reimann, *Supersymmetric Ratchets*, Phys. Rev. Lett. **86** (2001), 4992.
- [26] P. Reimann, *Brownian Motors: Noisy Transport far from Equilibrium*, eingereicht bei Phys. Rep., siehe auch cond-mat/0010237.
- [27] M. Schreier, P. Reimann, P. Hänggi und E. Pollak, *Giant Enhancement of Diffusion and Particle Separation in Rocked Periodic Potentials*, Europhys. Lett. **44** (1998), 416.
- [28] P. Reimann, C. Van den Broeck, H. Linke, P. Hänggi, M. Rubi und A. Perez-Madrid, *Giant Acceleration of Free Diffusion by use of Tilted Periodic Potentials*, Phys. Rev. Lett. **87** (2001), 010602.
- [29] P. Reimann, *A Uniqueness-Theorem for “Linear” Thermal Baths*, Chem. Phys. **268** (2001), 337.
- [30] P. Reimann, R. Kawai, C. Van den Broeck und P. Hänggi, *Coupled Brownian Motors: Anomalous Hysteresis and Zero-bias Negative Conductance*, Europhys. Lett. **45** (1999), 545.
- [31] C. Van den Broeck, P. Reimann, R. Kawai und P. Hänggi, *Coupled Brownian Motors*, pp. 93-111 in “Statistical Mechanics and Biocomplexity”, Lecture Notes in Physics, Vol. 527, edited by D. Reguera, J.M. Rubi, and J.M.G. Vilar, Springer, Berlin, 1999.
- [32] P. Reimann, C. Van den Broeck und R. Kawai, *Nonequilibrium Noise in Coupled Phase Oscillators*, Phys. Rev. E **60** (1999), 6402.
- [33] C. Van den Broeck, I. Bena, P. Reimann und J. Lehmann, *Coupled Brownian Motors on a Tilted Washboard*, Ann. Phys. (Leipzig) **9** (2000), 713.

- [34] P. Reimann, G.J. Schmid und P. Hänggi, *Universal Equivalence of Mean-First Passage Time and Kramers Rate*, Phys. Rev. E **60** (1999), R1.
- [35] G.J. Schmid, P. Reimann und P. Hänggi, *Control of Reaction Rate by Asymmetric Two-State Noise*, J. Chem. Phys. **111** (1999), 3349.
- [36] J. Lehmann, P. Reimann und P. Hänggi, *Surmounting Oscillating Barriers*, Phys. Rev. Lett. **84** (2000), 1639.
- [37] J. Lehmann, P. Reimann und P. Hänggi, *Surmounting Oscillating Barriers: Path-integral Approach for Weak Noise*, Phys. Rev. E **62** (2000), 6282.
- [38] P. Reimann, R. Bartussek und P. Hänggi, *Reaction rates when barriers fluctuate: A singular perturbation approach*, Chem. Phys. **235** (1998), 11.
- [39] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung und F. Marchesoni, *Stochastic Resonance*, Rev. Mod. Phys. **70** (1998), 223.
- [40] L. Gammaitoni, M. Löcher, A. Bulsara, P. Hänggi, J. Neff, K. Wiesenfeld, W. Ditto und M. E. Inchiosa, *Controlling Stochastic Resonance*, Phys. Rev. Lett. **82** (1999), 4574.
- [41] M. Löcher, M. E. Inchiosa, J. Neff, A. Bulsara, K. Wiesenfeld, L. Gammaitoni, P. Hänggi und W. Ditto, *Theory of Controlling Stochastic Resonance*, Phys. Rev. E **62** (2000), 317.
- [42] I. Goychuk und P. Hänggi, *Quantum Stochastic resonance in Parallel*, New Journal of Physics **1** (1999), 14.1 - 14.14.
- [43] M. Thorwart, L. Hartmann, I. Goychuk und P. Hänggi, *Controlling decoherence of a two level atom in a lossy cavity*, J. Mod. Opt. **47** (2000), 2905.
- [44] P. Reimann und P. Hänggi, *Quantum Features of Brownian Motors and Stochastic Resonance*, Chaos **8** (1998), 629.
- [45] P. Hänggi und P. Reimann, *Quantum Ratchets Reroute Electrons*, Physics World **12** (1999), 21.
- [46] I. Goychuk und P. Hänggi, *Minimal Quantum Brownian Rectifiers*, J. Phys. Chem., im Druck.
- [47] M. Thorwart, P. Reimann und P. Hänggi, *Iterative Algorithm versus Analytic Solutions of the Parametrically Driven Dissipative Quantum Harmonic Oscillator*, Phys. Rev. E **62** (2000), 5808.
- [48] M. Thorwart, M. Grifoni und P. Hänggi, *Strong coupling theory for driven tunneling and vibrational relaxation*, Phys. Rev. Lett. **85** (2000), 860.
- [49] M. Thorwart, M. Grifoni und P. Hänggi, *Strong coupling theory for tunneling and vibrational relaxation in driven bistable systems*, Annals of Physics (N.Y), im Druck.

Diplomarbeiten und Dissertationen, die im Berichtszeitraum abgeschlossen wurden und in Zusammenhang mit dem Graduiertenkolleg stehen

Diplomarbeiten:

- A. Hoffmann, *Rayleigh-Bénard-Konvektion in kleinen Geometrien*, November 1998
- J. Lehmann, *Zerfall bei oszillierender Barriere*, September 1999
- G. Schmid, *Steuerung von Ratenprozessen*, Oktober 1999
- A. Döhle, *Modellierung der Kompaktionsdynamik granularer Systeme*, August 1999

Dissertationen:

- S. Kohler, *The interplay of chaos and dissipation in driven quantum systems*, März 1999
- L. Hartmann, *Driven tunneling dynamics of dissipative two-state quantum systems*, Juli 2000
- M. Thorwart, *Tunneling and vibrational relaxation in driven multilevel systems*, Juli 2000
- R. Eichhorn, *Simple polynomial chaotic models*, Juli 2000
- M. Raible, *Stochastische Feldgleichungen für amorphes Schichtwachstum*, Juli 2000
- L. Callenbach, *Synchronization phenomena in chaotic and noisy oscillatory systems*, Juli 2001
- B. Reinhard, *Dynamik in Ionen-Fallen*, voraussichtliche Fertigstellung September 2001

ARBEITSGRUPPE 5: GLOBALE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. Jost-Hinrich Eschenburg

Prof. Dr. Ernst Heintze

Dr. Christoph Böhm, Stipendiat vom 1. 10. 1996 bis 31. 7. 1997 und vom 1. 5. 1999 bis 30. 9. 1999

Dr. Ulrich Christ, Stipendiat vom 1. 12. 1997 bis 30. 6. 1998, seit 1. 7. 1998 Kollegiat

Dr. Christian Groß, Stipendiat vom 1. 9. 1997 bis 31. 8. 1999, seit 1. 9. 1999 Kollegiat

Dr. Andreas Kollross, Kollegiat seit 1. 3 1997

Dr. Liviu Mare, Stipendiat vom 1. 1. 1997 bis 31. 7. 1998 und vom 10. 10. 1999 bis 30. 6. 2000

Dr. Hans Jakob Rivertz, Stipendiat vom 1. 1. 2001 bis 30. 4. 2001

Dipl.-Math. Marianne Leitner, Stipendiatin seit 1. 6. 2000

Forschungsthemen

Seit dem Fortsetzungsantrag vom September 1998 gab es erhebliche personelle Veränderungen in der Arbeitsgruppe, die nicht ohne Einfluss auf die Wahl der Forschungsthemen blieb:

- Evangelia Samiou bewarb sich 1998 erfolgreich auf eine Stelle als Dozentin an der Universität von Zypern,
- Augustin Liviu Mare nahm 1999 eine Postdoc-Stelle an der McMaster University in Hamilton, Kanada an,
- Jens Heber wurde 1999 auf einen Lehrstuhl an die Universität Kiel berufen,
- Christoph Böhm folgte ihm nach Kiel auf eine Assistentenstelle,
- Andreas Kollross erhielt vom 1. 12. 99 bis zum 30. 11. 2000 ein DFG-Stipendium für einen Forschungsaufenthalt an der North Eastern University, Boston.

Andererseits konnte unsere Arbeitsgruppe im Berichtszeitraum einige exzellente junge Mathematiker als Gäste aufnehmen: Dr. Hans Jakob Rivertz aus Oslo (Januar bis April 2001) als Postdoktorand im Graduiertenkolleg (siehe den Einzelbericht im Teil C) sowie Dr. Krishnan Shankar aus Ann Arbor (April bis Juli 01) als Verwalter einer Assistentenstelle. Dr. Shankar arbeitet über positive Krümmung und Fundamentalgruppe und verbindet mit diesen Schwerpunkten unsere Interessen mit denen der Arbeitsgruppe 7. Ab September wird an seiner Stelle Dr. Charles Boubel aus Nancy bei uns sein; er untersucht die Geometrie (besonders die Holonomie) von Lorentz-Mannigfaltigkeiten, den Modellräumen der Allgemeinen Relativitätstheorie. Außerdem erwarten wir ab September 2001 Prof. T. Vlachos aus Ioannina (Griechenland) als Humboldt-Stipendiaten; sein Forschungsschwerpunkt sind Minimalflächen.

Im Fortsetzungsantrag vom September 1998 haben wir 3 Forschungsthemen genannt:

- (a) Kac-Moody-Algebren und polare Aktionen,
- (b) Einsteinmetriken mit hoher Symmetrie,
- (c) Pluriminimale Kähler-Untermannigfaltigkeiten.

Neu hinzugekommen ist das Thema "Geometrische Strukturen in der Quantentheorie", bei dem wir eng mit den Arbeitsgruppen 6 (Eckern, Ziegler) und 7 (Lohkamp) zusammenarbeiten. In einem gemeinsamen Workshop bei Oberstdorf (Allgäu) haben wir u.a. einen physikalischen Zugang zum Indexsatz von Atiyah-Singer und mögliche Anwendungen besprochen. Das Dissertationsprojekt von Marianne Leitner (siehe ihren Bericht im Teil C) über geometrische Strukturen beim Quanten-Hall-Effekt entstand aus dieser Kooperation und wird von E. Heintze in Zusammenarbeit mit K. Ziegler betreut. Im Zusammenhang mit Thema (a) stand ein gemeinsames Seminar mit der Arbeitsgruppe 2 (Aulbach, Colonius) über Kontrolltheorie auf projektiven Räumen und Fahnenmannigfaltigkeiten; die Zusammenarbeit wird fortgesetzt und könnte zu gemeinsamen Dissertationsthemen führen.

Ergebnisse

(a) *Kac-Moody-Algebren und polare Aktionen auf Hilberträumen*

Von Christian Groß konnte gezeigt werden, dass jede Involution auf einer affinen Kac-Moody-Algebra (genauer auf ihrer L^2 -Vervollständigung) vermöge der Isotropiedarstellung eine polare, affine Aktion auf einen Hilbertraum induziert [13]. Diese Aktionen sind dadurch gekennzeichnet, dass es einen endlich dimensionalen Unterraum gibt, der jede Bahn trifft und zwar stets orthogonal. Insbesondere sind die Hauptbahnen polarer Aktionen isoparametrische Untermannigfaltigkeiten.

Dieses Ergebnis wirft erneut die Frage nach der Klassifikation von Involutionen affiner Kac-Moody Algebren auf. Dazu gibt es bereits eine umfangreiche Literatur, die aber vom differentialgeometrischen Standpunkt aus nicht befriedigt. Insbesondere war nicht klar, ob die von Terng angegebenen Involutionen, die von zwei Involutionen auf der zugrunde liegenden endlichdimensionalen Liealgebra induziert werden, alle Involutionen ausschöpfen. Aufbauend auf Ideen einer Arbeit von Heintze, Palais, Terng und Thorbergsson konnten Heintze und Groß überraschenderweise zeigen, dass Involutionen 2. Art affiner Kac-Moody Algebra tatsächlich in 1:1 Beziehung zu Paaren von Involution kompakter, einfacher Liealgebren stehen (modulo natürlicher Äquivalenz). Dabei heißt eine Involution von 1. bzw. 2. Art, wenn der Erzeuger des Zentrums auf sich selber bzw. sein Negatives abgebildet wird. Dieses Ergebnis wirft ein ganz neues Licht auf die bisher in der Literatur angegebenen umfangreichen und komplizierten Tabellen.

Die Ergebnisse unserer Arbeit über endlich dimensionale isoparametrische Untermannigfaltigkeiten und polare Darstellungen wurden von J. Eschenburg auf der Konferenz in Aarhus im August 1998 vorgestellt und danach in der Arbeit [4] zusammengefasst. In engem Zusammenhang dazu steht auch die Arbeit [5], in der gewisse Bahnen polarer Aktionen auf symmetrischen Räumen, nämlich extrinsisch symmetrische Isotropiebahnen, durch eine geometrische Eigenschaft gekennzeichnet werden. L. Mare bestimmte die Kohomologie und Quantenkohomologie von endlich und unendlich dimensional Bahnen polarer Aktionen mit geometrischen Methoden (siehe seinen Bericht im Teil C). H. J. Rivertz verband Untermannigfaltigkeiten mit Darstellungstheorie von Liegruppen auf ganz andere Weise; er konnte damit neue lokale Bedingungen für die Einbettbarkeit einer Riemannschen Mannigfaltigkeit in einen euklidischen Raum finden (siehe seinen Bericht im Teil C).

(b) *Einsteinmetriken mit hoher Symmetrie*

Siehe Bericht von Dr. C. Böhm im Teil C.

(c) Kähler-Untermannigfaltigkeiten

Im Berichtszeitraum wurde das Studium der pluriminimalen Kähler-Untermannigfaltigkeit in symmetrischen Räumen fortgesetzt und führte zu dem Übersichtsartikel [11], in dem insbesondere alle isotropen Beispiele in der komplexen Grassmann-Mannigfaltigkeit gekennzeichnet werden konnten. Die Struktur der pluriminimalen Untermannigfaltigkeiten maximaler Dimension in beliebigen symmetrischen Räumen konnte noch nicht geklärt werden, allerdings führte die Auseinandersetzung mit dieser Frage zu der bereits erwähnten Arbeit [5].

Intensiv untersucht wurden darüber hinaus auch solche Kähler-Untermannigfaltigkeiten, die Flächen konstanter mittlerer Krümmung verallgemeinern. In gemeinsamer Arbeit mit Burstall, Ferreira und Tribuzy konnte gezeigt werden, dass diese ebenso wie pluriminimale durch eine einparametrische Familie von Deformationen gekennzeichnet sind und dass die zugehörigen Gaußabbildungen zu einer assoziierten Familie von pluriharmonischen Abbildungen gehören. Die Arbeit dauert an und wird im nächsten Berichtszeitraum abgeschlossen werden. Dissertationen aus diesem Bereich sind möglich, wurden aber bisher nicht vergeben.

Stellung im Graduiertenkolleg

Engere Beziehungen bestehen zu den Arbeitsgruppen 1, 2, 6 und 7. Mit den Arbeitsgruppen 1 und 2 teilen wir das Interesse an Dynamischen Systemen. Diese treten in vielfacher Weise in der Differentialgeometrie auf, und umgekehrt kann unsere Arbeitsgruppe zum Verständnis geometrischer Strukturen in der Dynamik beitragen, z.B. Fahnenmannigfaltigkeiten. Dies wurde durch ein gemeinsames Seminar im Studienjahr 2000/01 deutlich. Eine starke Verbindung hat sich zur Arbeitsgruppe 6 (Eckern, Ziegler) entwickelt, die sich im Koreferat zur Dissertation von Herrn Osterloh, in gemeinsamen Seminaren sowie einer gemeinsam betreuten Dissertation (M. Leitner) ausgedrückt haben. Mit der Arbeitsgruppe 7 verbindet uns das Interesse an topologischen, geometrischen und analytischen Fragen, was sich in vielen gemeinsamen Seminaren und Vortragsveranstaltungen (z.B. die Augsburger Geometrietage) widerspiegelt. Für die Zukunft wollen wir auch die numerische Komponente der Geometrie verstärkt berücksichtigen und hoffen dabei auf die Unterstützung der Arbeitsgruppe 3.

Publikationen, die im Berichtszeitraum entstanden sind und in Zusammenhang mit dem Graduiertenkolleg stehen

- [1] I. Bergmann, *Reducible polar representations*, Manuscripta math. 104, 309–324 (2001).
- [2] C. Böhm, *Inhomogeneous Einstein metrics on low-dimensional spheres and other low-dimensional spaces*, erscheint in "Invent. Math."
- [3] J.-H. Eschenburg, *Parallelity and Extrinsic Homogeneity*, Math. Z. 229, 339–347 (1998).
- [4] J.-H. Eschenburg, *Isoparametric submanifolds and symmetric spaces*, Contemporary Mathematics 258, 145–155 (2000).
- [5] J.-H. Eschenburg, *Higher rank curved Lie triples*, erscheint in "J. Math. Soc. Japan" 54 (2002).
- [6] J.-H. Eschenburg, *Almost positive curvature on the Gromoll-Meyer 7-sphere*, erscheint in "Proc. Am. Math. Soc." (2002).
- [7] J.-H. Eschenburg und L. Hefendehl-Hebeker, *Die Gleichung 5. Grades: Ist Mathematik erzählbar?*, Math. Semesterberichte 47, 193–220 (2000).
- [8] J.-H. Eschenburg und E. Heintze, *Unique Decomposition of Riemannian manifolds*, Proc. Am. Math. Soc. 126, 3075–3078 (1998).
- [9] J.-H. Eschenburg und E. Heintze, *Polar representations and symmetric spaces*, J. Reine Angew. Math. 507, 93–106 (1999).

- [10] J.-H. Eschenburg und E. Heintze, *On the classification of polar representations*, Math. Z. 232, 391–398 (1999).
- [11] J.-H. Eschenburg und R. Tribuzy, *Isotropic pluriminimal submanifolds*, Mathematica contemporanea 17, 171–191 (1999).
- [12] J.-H. Eschenburg und McKenzie Y. Wang, *The Initial Value Problem for Cohomogeneity One Einstein Metrics*, J. of Geometric Analysis 10, 109–137 (2000).
- [13] C. Groß, *s-Representations for involutions on affine Kac-Moody algebras are polar*, Manuscr. math. 103, Nr. 3, 339–350 (2000).
- [14] J. Heber, *Noncompact homogeneous Einstein spaces*, Invent. Math. 133, 279–352 (1998).
- [15] E. Heintze und X. Liu, *A splitting theorem for isoparametric submanifolds in Hilbert space*, J. Differential Geom. 45, 319 - 335 (1997).
- [16] E. Heintze und X. Liu, *Homogeneity of infinite dimensional isoparametric submanifolds*, Annals of Math. 149, 149–181 (1999).
- [17] E. Heintze, X. Liu und C. Olmos, *Isoparametric submanifolds and a Chevalley-type restriction theorem*, erscheint in “Integrable systems, geometry and topology“, Ch.-L. Terng (editor), International Press (2001).

Diplomarbeiten und Dissertationen, die im Berichtszeitraum abgeschlossen wurden und in Zusammenhang mit dem Graduiertenkolleg stehen

Diplomarbeiten:

- O. Lenhart, *Geometrie homogener Hyperflächen*, März 1998.
- C. Heyne, *Schleifenalgebren und Automorphismen endlicher Ordnung einfacher Liealgebren*, April 1998.
- O. Groß, *Der Satz von Sussmann und unendlichdimensionale Distributionen*, März 1999.
- A. Sluha, *Beispiele und Gegenbeispiele in abstrakten Räumen*, Dezember 1999.
- N. Schneible, *Metrische Faserungen von euklidischen Räumen*, März 2000.
- A. Kreibich, *Aperiodische Pflasterungen*, September 2000.

Dissertationen:

- R. Bock, *Doppelquotienten ungerader Dimension und positive Schnittkrümmung*, Dezember 1998.
- I. Bergmann, *Polar Actions*, November 1999.
- U. Christ, *Homogeneity of equifocal submanifolds*, Juli 2000.

ARBEITSGRUPPE 6: STARK KORRELIERTE VIELTEILCHENSYSTEME

Prof. Dr. Ulrich Eckern

Prof. Dr. Klaus Ziegler

Dr. Daniel Braak, Kollegiat seit 2. 11. 1998

Dr. Renate Gade, Kollegiatin vom 1. 4. 1997 bis 31. 3. 2000

Dipl.-Phys. Frieder Kalisch, Stipendiat seit 1. 4. 1999

Dipl.-Phys. Andreas Osterloh, Stipendiat vom 1. 5. 1997 bis 31. 4. 2000, Kollegiat vom 1. 5. 2000 bis 31. 8. 2000

Vorbemerkung

Wie schon im letzten Berichtszeitraum wurde die Gruppe „integrable Modelle“ durch die Mitarbeit eines AvH-Stipendiaten (Prof. You-Quan Li) entscheidend verstärkt.

Die Arbeiten zu Vertex-Modellen auf der Basis unendlich-dimensionaler Darstellungen bestimmter Quanten-Gruppen (Dr. Renate Gade), die in eine Habilitation münden sollten, konnten leider nicht wie geplant abgeschlossen werden.

Forschungsthemen

Ein großer Teil der Forschungen der Arbeitsgruppe 6 war dem Studium integrierbarer Modelle gewidmet, wie sie insbesondere im Zusammenhang mit wechselwirkenden Vielteilchen-Systemen in einer räumlichen Dimension auftreten. Speziell wurde für verschiedene Modelle der Zusammenhang zwischen Integrierbarkeit und fraktioneller Statistik studiert. Behandelt wurden weiterhin allgemeine Fragen von Quanten-Symmetrien in integrierbaren Modellen sowie von Zufallsmatrizen, wie sie zum Beispiel in mesoskopischen Systemen auftreten. Der Einfluss von Unordnung auf die Transporteigenschaften von Dirac-Fermionen, die modellhaft zur Beschreibung des Quanten-Hall-Effekts benutzt werden können, war ein weiteres Thema.

Ergebnisse

Die Ergebnisse der Arbeitsgruppe 6 sind in verschiedenen Publikationen dokumentiert und sollen daher hier nur kurz zusammengefasst werden.

(a) Integrierbarkeit und fraktionale Statistik

Die Untersuchungen zu diesem Themenkreis konzentrierten sich auf bestimmte Varianten von Modellen wechselwirkender Teilchen in einer Raumdimension, nämlich das XXZ- und das Hubbard-Modell. Ein zunächst untersuchtes Modell mit einer phononartigen Wechselwirkung erwies sich als nicht unmittelbar integrierbar, jedoch die entsprechende Deformation der Statistik für das XXZ-Modell [1]. Dabei konnte ein Zusammenhang zwischen Deformation der Statistik und der Einbeziehung einer Wechselwirkung mit einem Eichfeld hergestellt werden, was zu einer bestimmten Form von korreliertem Hüpfen führt [2, 3]. Die beobachtete Verknüpfung zwischen deformierter Statistik und eichartig korreliertem Hüpfen wurde systematisch erweitert [4], so dass auch allgemeinere integrierbare fraktionale Statistiken klassifiziert werden konnten. Die Ergebnisse sind in der Dissertation von Herrn Osterloh zusammengefasst [5]; siehe auch [6]. In Zusammenarbeit mit Gästen wurden verschiedene andere integrierbare Modelle untersucht, wie ein integrierbares Kondo-Modell in Anwesenheit eines skalaren Potentials [7], eine Spin-Kette mit einer lokalen Verzerrung eines Bonds [8], sowie Modelle mit orbitaler Entartung [9, 10]. Damit zusammenhängende nicht-integrierbare Modelle, in denen Defekte sowie eine Verzerrung des Ionen-Gitters berücksichtigt wurden, wurden (numerisch) mit Hilfe der sogenannten Dichtematrix-Renormierungsgruppen-Methode studiert (auf ihre Grundzustandseigenschaften hin, insbesondere die Frage der Lokalisierung bzw. Delokalisierung der Wellenfunktion).

(b) *Integrable Modelle für den Quanten-Hall-Effekt*

Bei dem Versuch, ein integrables Modell für den (integralen) Quanten-Hall-Effekt zu konstruieren, wurden weitere Fortschritte gemacht [12, 13], die durchaus auch von großem mathematischen Interesse sind. Allerdings konnte die – sehr schwierige – Frage, ob ein integrables Modell den QH-Übergang beschreiben kann, noch nicht abschließend beantwortet werden.

(c) *Zufallsmatrizen*

Es konnte die exakte Einteilchen-Greensfunktion (Zustandsdichte) für kanonische Ensembles mit $N < \infty$ mittels supersymmetrischer Pfadintegrale reproduziert werden, was bisher nur mittels orthogonaler Polynome möglich war. Diese Methode haben wir auch für endliche Matrixgröße N auf die von Altland und Zirnbauer vorgeschlagenen schwach nicht-invarianten Ensembles erweitert. Auf diese Weise war es möglich, die Zustandsdichte eines dieser Ensembles zu berechnen, ohne den thermodynamischen Limes auszuführen. Verwendet man dann die physikalisch relevante Skalierung, stellt sich die Zustandsdichte für $N \rightarrow \infty$ als identisch mit dem von den kanonischen Ensembles her bekannten Halbkreisgesetz heraus. Dies hat Folgen für die bei den neuen Ensembles vermuteten neuen Universalitätsklassen. Hierzu wird eine Publikation vorbereitet. Mögliche weitere Anwendungen, die sich insbesondere ergeben, wenn man die Transformation auf invariante Variablen (Q-Matrizen) vermeidet, werden gegenwärtig von F. Kalisch und Dr. D. Braak untersucht. Eine Anwendung der Zufallsmatrix-Theorie auf ein Problem wechselwirkender Elektronen wurde in Zusammenarbeit mit Dr. M. Letz (Universität Mainz) diskutiert [14].

(d) *Quantensymmetrien*

Hier ist die neuartige Symmetrie des XXZ-Modell mit spezieller Anisotropie (der sog. “root-of-unity” Bedingung) aufgeklärt worden [15]. Die dabei verwendete Terminologie der “transparenten Anregungen” erlaubt eine einfache physikalische Interpretation des Entartungsspektrums, die auch anwendbar ist, wenn die Symmetriegruppe selbst wie im vorliegenden Fall noch unbekannt ist und eine vereinheitlichte Beschreibung aller bisher bekannten “zusätzlichen Symmetrien” in integrablen Systemen gestattet. Mit Hilfe direkter Berechnung der Wellenfunktionen konnte die Abhängigkeit des entarteten Multiplets von den Parametern des Zustands mit höchstem Gewicht für den Fall $\Delta = \pm 1/2$ analytisch bestimmt werden. Bei diesem Projekt hat sich das Konzept des “Bethe Ansatzes für gebundene Zustände”, das vorher im Rahmen des eindimensionalen Hubbard Modells eingeführt worden war [16], als nützlich erwiesen. Diese Arbeiten werden von Dr. D. Braak fortgesetzt.

(e) *Dirac-Fermionen mit Unordnung: Transporteigenschaften*

Arbeiten zu zweidimensionalen Dirac-Fermionen mit Unordnung der letzten Jahre haben gezeigt, daß – entgegen der ursprünglich erwarteten Universalität physikalischer Eigenschaften – die Details des Modells (z.B. Typ der Unordnung) wesentlich die qualitativen Eigenschaften beeinflussen. Zum Beispiel hängt die Singularität der Zustandsdichte bei der Energie $E = 0$, die ohne Unordnung linear mit E verschwindet, vom Unordnungstyp ab. Für das Zufallsvektorpotential wurde für die mittlere Zustandsdichte bei Unordnungsstärke g

$$\rho(E) \sim \rho_0 |E|^\alpha \quad \alpha = \frac{1-g}{1+g},$$

von verschiedenen Autoren vorhergesagt; eine Rechnung für starke Unordnung zeigte jedoch, daß auch für starke Unordnung $\alpha > 0$ ist [17]. In Zusammenarbeit mit Prof. Hirschfeld (University of Florida) wurden auch noch andere Systeme dieses Typs untersucht [18-20].

Unter Verwendung numerischer Verfahren ist das Skalenverhalten der Lokalisierungslänge der Eigenfunktionen verschiedener Dirac-Operatoren mit Unordnung von studiert worden. Dabei kamen zunächst analytische Methoden zur Anwendung [21, 22], später unter F. Kalisch auch

numerische Verfahren. Auch hierbei stellte sich heraus, daß es kein wirklich universelles Verhalten gibt, sondern die observablen Größen von den Details des Modells abhängen.

Die Beziehung zwischen Gittermodellen mit magnetischem Fluß und Dirac-Fermionen auf dem Gitter wurden genauer studiert [23]. Die Transporteigenschaften (d.h. Ströme als Reaktion auf kleine Eichfelder) hängen dabei stark von der Natur des Gitters ab. Dies steht in Zusammenhang mit der Anzahl von Knoten in der Bandstruktur, die durch den Gittertyp vorgegeben ist.

(f) *Bose-Einstein-Kondensation in wechselwirkenden Systemen*

Bei der Diskussion des wechselwirkenden Bosegas besteht die Hauptidee (Bogoliubov) darin, das Kondensat als makroskopischen Quantenzustand zu separieren und die nicht kondensierten Bosonen als freie Quasiteilchen zu betrachten. Diese sehr erfolgreiche Approximation gibt aber die Situation eines dichtes Bose-systems (z.B. superfluides Helium) nicht korrekt wieder. Aus diesem Grund war es wichtig, die Wechselwirkung des Kondensats mit den nicht kondensierten Bosonen in einer Art von Zweiflüssigkeitstheorie zu untersuchen. Diese Theorie liefert auch die im Experiment beobachtete Unterdrückung des Kondensats durch Wechselwirkungseffekte [26, 27].

Kooperationen

Die oben beschriebenen Untersuchungen sind inhaltlich teilweise an Teilprojekte der DFG-Forschergruppe *Metal-Isolator-Übergang und Magnetismus in hochkorrelierten Übergangsmetal-Chalkogeniden* (die Ende 2000 ausgelaufen ist) und des neuen (seit Anfang 2000 bestehenden) Sonderforschungsbereichs in der Physik, SFB 484, *Kooperative Phänomene im Festkörper: Metal-Isolator-Übergänge und Ordnung mikroskopischer Freiheitsgrade* angebunden. Insbesondere werden die eher mathematisch-analytischen Untersuchungen im Graduiertenkolleg in schöner Weise durch numerische Studien in Forschergruppe bzw. SFB ergänzt, so dass auch ein Anwendungsbezug hergestellt wird.

Die Gruppe „integrable Modelle“ (Eckern/Osterloh/Schuster) wurde in den letzten zwei Jahren durch die Mitarbeit eines AvH-Stipendiaten (Prof. You-Quan Li, Zhejiang University, Hangzhou, China; Juli 1999 - Juli 2001) entscheidend verstärkt, wodurch auch eine Kooperation mit seinem Mitarbeiter Dr. Zu-Jian Ying, der insgesamt zwei Monate (November 2000 und Mai 2001) in Augsburg zu Gast war, initiiert werden konnte. (Die Besuche von Dr. Ying konnten über DFG-Forschergruppe und SFB finanziert werden.) Die Kooperationen mit Prof. Li und Dr. Ying sollen fortgeführt werden. Eine weitere AvH-Bewerbung (Dr. Bin Chen, Hangzhou Teachers College, Hangzhou, China), die den Themen des Graduiertenkollegs nahe stehen wird, ist in Vorbereitung. – Dr. Andreas Osterloh, dessen Promotion im August 2000 abgeschlossen wurde, ist zur Zeit an der Universität in Catania, Italien, tätig; auch diese Kooperation wird weitergeführt.

Die Kooperation mit Professor Natan Andrei von der Rutgers University, Piscataway, USA (vergleiche Refs. 15 und 16) mit Dr. D. Braak besteht fort. In diesem Zusammenhang war der Gastaufenthalt von Prof. Andrei in Augsburg (September 2000) sehr fruchtbar. Auch die Zusammenarbeit der Gruppe „ungeordnete Systeme“ (Braak/Kalisch/Ziegler) mit der University of Florida in Gainesville, USA (Prof. Hirschfeld, vgl. Refs. 18 - 20) erweist sich als erfolgreich und soll fortgeführt werden, ebenso deren Kooperation mit der Universität Como, Italien (Prof. Jug, vgl. Ref. 24 und 25); ein ERASMUS-Vertrag mit der Universität Como wurde ebenfalls vor etwa einem Jahr unterzeichnet. In diesem Zusammenhang hat K. Ziegler mehrere Vorlesungsreihen zu aktuellen Themen der Statistischen Physik und der Festkörpertheorie in den Jahren 1998, 1999 und 2000 im Rahmen der Graduiertenausbildung an der Universität Como gehalten.

Stellung im Graduiertenkolleg

Die Zusammenarbeit mit der Arbeitsgruppe 5 (Heintze, Eschenburg) konnte im Zusammenhang mit der Promotion von Andreas Osterloh (vgl. Teil C) intensiviert werden. Insbesondere hat Herr Prof. Eschenburg das Zweitgutachten zu der Dissertation verfasst und in seinem Gutachten darauf hingewiesen, dass es (frei zitiert) „sehr beeindruckend ist, wie hier mit Symmetrieargumenten ein zunächst völlig hoffnungslos scheinendes Eigenwertproblem nach mehreren Transformationen vollständig gelöst wird“, wobei „an entscheidenden Stellen Ideen eingehen, die aus der physikalischen Interpretation des Modells stammen“. Angeregt durch diese Untersuchungen sind Fragestellungen präzisiert worden, die für beide Seiten – Mathematik und Physik – von großem Interesse sind. Weitere intensive Diskussionen wurden über mögliche Verallgemeinerungen der Harish-Chandra-Formel und technische Aspekte der Anwendung gruppentheoretischer Konzepte (zum Beispiel Integration über die unitäre Gruppe $SU(N)$) geführt (Braak, Eschenburg).

Gemeinsam mit der Arbeitsgruppen 5 und 7 haben D. Braak, F. Kalisch und K. Ziegler im November 2000 einen Workshop zum Thema „Anwendungen des Atiyah-Singer Index-Theorems“ organisiert und durchgeführt, in dem in einigen Vorträgen auf den Quanten-Hall-Effekt und seine möglichen index-theoretischen, d. h. topologischen Erklärungen eingegangen wurde. Zu diesem Themenbereich gehört auch das Dissertationsprojekt von Frau M. Leitner, das gemeinsam von den Professoren Heintze (AG 5) und Ziegler betreut wird.

Im Zusammenhang mit ungeordneten Systemen in einer Dimension (Braak/Kalisch/Ziegler) hat sich eine Kooperation zur Theorie der Differenzen-Gleichungen (Aulbach AG 2) entwickelt, die ein größeres Potential für künftige Zusammenarbeit bietet. Hier liegt die Idee zu Grunde, daß bei statischer Unordnung letztere z.B. für die zugeordneten Greenschen Funktionen ausgemittelt werden kann. Die gemittelte Greensche Funktion wird dann als Pfadintegral bzgl. eines Superfeldes (Fermion+Boson) dargestellt, aus dem dann ein nulldimensionaler Hamilton-Operator extrahiert wird. Für diesen kann dann eine diskrete Schrödinger-Gleichung angegeben werden. Die Lösung dieser Gleichung ist von großem Interesse im Rahmen der Theorie der Differenzen-Gleichungen, denn sie gehört zu einem Typ von Gleichungen, der nicht im Rahmen der traditionellen Theorie behandelt werden kann. Dieses Problem wird in Kooperation mit den Professoren Aulbach (AG 2) und Elaydi (Trinity University, San Antonio, Texas, USA) intensiv verfolgt [28].

Einem Gutachter-Hinweis bei der Begehung vor drei Jahren folgend sollen auch die Berührungspunkte der Untersuchungen in den Arbeitsgruppen 4 (Hänggi, Linz) und 6 verstärkt in das Graduiertenkolleg eingebracht werden. Diese sind unter anderem im Bereich der mesoskopischen Physik gegeben; zentrale Frage ist dabei der Response mesoskopischer und/oder dissipativer Systeme unter dem Einfluss externer Störungen. Als konkretes Projekt werden zur Zeit Untersuchungen zur sogenannten „nichtlinearen Reibung“ durchgeführt, die auch bei granularen Systemen eine wichtige Rolle spielt. Die Konstruktion einer effektiven Wirkung kann dabei dem von Caldeira und Leggett vorgeschlagenen Weg folgen; offene Fragen betreffen eine systematische Klassifizierung sowie die Begründung der „richtigen“ Quantenmechanik im nichtlinearen Fall (Eckern, Linz).

Neue Kooperationsmöglichkeiten eröffneten sich während der diesjährigen Klausurtagung auf der Reisenburg (Mai 2001) mit der Arbeitsgruppe 1 (Kielhöfer). Die in der AG 1 untersuchten statischen, räumlich zweidimensionalen Modelle (von einem verallgemeinerten Ginzburg-Landau-Typ) für martensitische Systeme haben, nach (in der Sprache der Physik) Integration über die auf einem Halbraum definierten „freien“ Variablen, eine große Ähnlichkeit mit den effektiven Modellen für dissipative Quanten-Systeme, d. h. in beiden Fällen tritt ein (nur) algebraisch zerfallender Beitrag in der effektiven Wirkung bzw. in der entsprechenden klassischen Bewegungsgleichung auf. Die in der AG 6 (und auch der AG 4) bestehenden umfangreichen Erfahrungen zur dissipativen Quantenmechanik sollen in die Untersuchungen der martensitischen Systeme einfließen.

Publikationen, die im Berichtszeitraum entstanden sind und in Zusammenhang mit dem Graduiertenkolleg stehen

- [1] L. Amico, A. Osterloh, and U. Eckern: *XXZ model for particles obeying fractional statistics*. Phys. Rev. B **58** (1998), 1703-1706.
- [2] A. Osterloh, L. Amico, and U. Eckern: *Bethe Ansatz solution of a new class of Hubbard-type models*. J. Phys. A **33** (2000), L87-L92.
- [3] A. Osterloh, L. Amico, and U. Eckern: *Solvability of Generalized Schulz-Shastry type models*. Nucl. Phys. B **588** (2000), 531-551.
- [4] A. Osterloh, L. Amico, and U. Eckern: *Fermionic long-range correlations realized by particles obeying deformed statistics*. J. Phys. A **33** (2000), L487-L492.
- [5] A. Osterloh: *Bethe Ansatz Solvability, Correlated Hopping, and the Connection to Generalized Exchange Statistics*. SHAKER Verlag (2001), ISBN 3-8265-8351-5.
- [6] A. Osterloh, L. Amico, and U. Eckern: *Integrable Long-Range Correlations and Generalized Statistics*. SSPCM 2000 – Symmetry and Structural Properties of Condensed Matter (Eds. T. Lulek, B. Lulek, and A. Wal), p. 275, World Scientific (2001).
- [7] Y. Wang and U. Eckern: *Scalar Potential Effect in an Integrable Kondo Model*. Phys. Rev. B **59** (1999), 6400-6410
- [8] J.-H. Dai, Y. Wang, and U. Eckern: *Ghost Spins and Novel Quantum Critical Behavior in a Spin Chain with Local Bond-Deformation*. Phys. Rev. B **60** (1999), 6594-6600.
- [9] Y.-Q. Li, S. J. Gu, Z. J. Ying, and U. Eckern: *One-dimensional model for doubly degenerate electrons*. Phys. Rev. B **62** (2000), 4866-4879.
- [10] Y.-Q. Li, M. Ma, D.-N. Shi, and F.-C. Zhang: *Ground State and Excitations of Spin Chain with Orbital Degeneracy*. Phys. Rev. B **60** (1999), 12781-87.
- [11] C. Schuster and U. Eckern: *Ground state properties of disordered and dimerized spin chains*. Ann. Phys. (Leipzig) **8** (1999), 585-588.
- [12] R. M. Gade: *Universal R-Matrix and graded Hopf algebra structure of $U_q(\widehat{gl}(2|2))$* . J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998), 4909-4925.
- [13] R. M. Gade: *An integrable $sl(2|2)$ vertex model for the spin quantum Hall critical point*. J. Phys. A: Math. Gen. **32** (1999), 7071-7082.
- [14] M. Letz and K. Ziegler: *Level Statistics and Localization for 2D Quantum Percolation*. Phil. Mag. B **79** (3) (1999), 491-499.
- [15] D. Braak and N. Andrei: *On the spectrum of the XXZ-chain at roots of unity*. Erscheint in J. Stat. Phys. (2001); cond-mat/0106593.
- [16] D. Braak and N. Andrei: *Physical picture of the gapped excitation spectrum of the one-dimensional Hubbard model*. Nucl. Phys. B **542** (1999), 551-580.
- [17] F. Kalisch and K. Ziegler: *2D Dirac Fermions in a Strong Random Vector Potential*. Vorabdruck (August 2001).
- [18] K. Ziegler, M. H. Hettler, and P. J. Hirschfeld: *Lower Bound for the Fermi Level Density of States of a Disordered D-Wave Superconductor in Two Dimensions*. Phys. Rev. B **57** (1998), 10825-10830.
- [19] W. A. Atkinson, P. J. Hirschfeld, A. H. MacDonald, and K. Ziegler: *Details of Disorder Matter in 2D d-Wave Superconductors*. Phys. Rev. Lett. **85** (2000), 3926-3929.
- [20] K. Ziegler, W. A. Atkinson, and P. J. Hirschfeld: *Density of states width-parity effect in d-wave superconducting quantum wires*. Phys. Rev. B **64** (2001), 64512-1-64512-7.

- [21] K. Ziegler: *Delocalization of 2D Dirac Fermions: the Role of a Broken Supersymmetry*. Phys. Rev. Lett. **80** (1998), 3113-3116.
- [22] U. Eckern and K. Ziegler: *Transport in a Nearly Periodic Potential with a Magnetic Field*. J. Phys. C: Condensed Matter **10** (1998), 6749-6760.
- [23] K. Ziegler: *Dirac Fermions on a Two-Dimensional Lattice and the Intermediate Metallic Phase*. Vorabdruck, cond-mat/0004318.
- [24] G. Jug and K. Ziegler: *Anomalous Frequency-Dependent Conductivity near the Quantum Hall Transition*. Phys. Rev. B **59** (1999), 5738-5744.
- [25] S. Villain-Guillot, G. Jug, and K. Ziegler: *Tails of the density of states of two-dimensional Dirac fermions*. Ann. Phys. (Leipzig) **9** (2000), 27-37.
- [26] K. Ziegler: *Condensation of a hard-core Bose gas*. Phys. Rev. A **62** (2000), 23611-1–23611-7.
- [27] K. Ziegler: *Properties of a Dense Bose-Einstein Condensate*, Proceedings of Laserphysics, Moscow 2001.
- [28] K. Ziegler: *Interacting Bosons in Optical Lattices*. Vorabdruck, cond-mat/0108041.
- [29] B. Aulbach, S. Elaydi and K. Ziegler: *Nonstandard difference equations techniques applied to quantum mechanics on a disordered chain*, in Vorbereitung.

Diplomarbeiten und Dissertationen, die im Berichtszeitraum abgeschlossen wurden und in Zusammenhang mit dem Graduiertenkolleg stehen

Diplomarbeiten:

- L. Serban, *Gittermodelle für den ganzzahligen Quanten-Hall-Effekt*. August 1998.
- H. Woldemariam, *Magnetismus in zwei Dimensionen*. Mai 2000.

Dissertationen:

- C. Schuster, *Random and periodic lattice distortions in one-dimensional Fermi and spin systems*. Juni 1999.
- A. Osterloh, *Bethe Ansatz solvability, correlated hopping, and the connection to generalized exchange statistics*. August 2000.

ARBEITSGRUPPE 7: GEOMETRISCHE ANALYSIS

Prof. Dr. Joachim Lohkamp

Dr. Anand Naique Dessai, Kollegiat seit 1. 5. 1997

Dipl.-Math. Marcus Lüdecke, Kollegiat seit 1. 7. 1997

Forschungsthemen und Ergebnisse

(a) *Numerische Behandlung und Visualisierung von krümmungsrelevanten Deformationen eines Raumes, insbesondere in Dimension drei*

Konkrete topologische Konstruktionen erlauben es, die Skalar- und auch Ricci-Krümmung lokal zu verkleinern. Diese Deformationen ordnen sich in einen allgemeineren Rahmen analytisch beschreibbarer Veränderungen der Metrik ein. Für das Auffinden möglichst optimaler Ansätze für derartige Deformationen bieten sich numerische Verfahren an. Der Kollegiat M. Lüdecke hat ein sehr hilfreiches Computer-Programm erstellt, welches ermöglicht, die Skalar­krümmung einer Metrik der Form $g = f_1^2 \cdot g_{\mathbb{R}} + f_2^2 \cdot g_{\mathbb{R}} + f_3^2 \cdot g_{\mathbb{R}}$ auf dem \mathbb{R}^3 ähnlich einer Computertomographie schichtweise zu analysieren. Dieser warped product-artige Ansatz ist nach den Arbeiten von DeTurck und Yang gerechtfertigt, da sich lokal jede Metrik in 3-Dimensionen so schreiben läßt. Dies hat dazu gedient, Kandidaten für solche Deformationen zu sichten. Problematisch sind die hohe Rechenintensität und Anforderungen an die grafischen Fähigkeiten des Computers, die für eine interaktive Nutzung des Programms (die Wahl der Metrik in Abhängigkeit von der zuvor berechneten Krümmung) notwendig ist. Der geometrische Hintergrund hierfür ist die Tatsache, daß es beispielsweise sehr leicht ist, fast überall krümmungsvergrößernde Deformationen zu finden, die nur in einem beliebig kleinen Bereich die Krümmung verkleinern. Diese Bereiche werden erst nach langer Rechenzeit deutlich und auch interpretierbar.

Im Rahmen eines derzeit noch laufenden HBCG-Antragsverfahrens besteht allerdings die Aussicht, daß wir einen ausreichend leistungsfähigen lokalen Rechner bekommen können, um dieses Projekt effektiv weiter verfolgen zu können.

(b) *Positive Skalar­krümmung auf offenen Mannigfaltigkeiten*

Die Arbeiten zum "Positive Energy Theorem" sowie die Arbeiten von Gromov und Lawson über vollständige Mannigfaltigkeiten positiver Skalar­krümmung liefern Hindernisse gegen die Existenz solcher Metriken für Mannigfaltigkeiten mit einem weit "auslaufenden" Ende. Die Frage nach der Existenz von solchen Metriken, die zugleich endliches Volumen haben, ist dagegen lange offen geblieben, da man insbesondere im Falle der Dimension 3 keine Möglichkeit sah, die Skalar­krümmung sinnvoll nach oben abzuschätzen, was für die weitere analytische Behandlung wichtig ist. Mit den in [8] entwickelten Methoden konnte Herr M. Lüdecke Ergebnisse erzielen, die denjenigen im kompakten Fall ohne Rand entsprechen. Dies ist Teil seiner Dissertation, die er demnächst erfolgreich abschließt.

(c) *Orbifold-Metriken auf 3-Mannigfaltigkeiten*

Als ein Ergebnis der Thurston-Theorie und umrahmender Resultate besitzen alle kompakten 3-Mannigfaltigkeiten eine große Zahl von Metriken mit konstanter negativer Schnittkrümmung, welche allerdings Singularitäten entlang einzelner Knoten aufweisen (Orbifold-Metriken). Die hierbei verwendeten Methoden sind durchweg globaler Natur. So betrachtet man etwa Fasern von S^3 entlang des figure-eight-Knotens, um dieses Ergebnis zunächst für Sphären zu beweisen, um anschließend über die Universalität dieses Knotens (via Überlagerung) auf andere Mannigfaltigkeiten zu schließen. Es ist wichtig zu klären, ob derartige Resultate typische Ergebnisse der 3-Topologie sind, in deren Bereich auch entscheidende Resultate wie die Poincaré-Vermutung liegen. Wenn schon bereits die große Zahl der möglichen Orbifold-Metriken indiziert, daß das Auftreten solcher Geometrien keine direkte Relevanz für die Topologie haben können, so wird dies explizit durch die in [10, 12] beschriebenen Ergebnisse und Methoden ausgeführt:

Hier wird gezeigt, wenn man Metriken negativer Schnittkrümmung mit Singularitäten auch lokal erzeugen kann und anschließend auf einer im übrigen beliebigen 3-Mannigfaltigkeit so zusammensetzen kann, daß die resultierende Metrik negative Schnittkrümmung mit Orbifold-Singularitäten hat. Diese Arbeiten sollen u. a. eine Brücke für die noch ausstehende glatte Hyperbolisierung in höheren Dimensionen liefern, die im Teil A (c) beschrieben wird.

(d) *Skalarflache Mannigfaltigkeiten*

In diesem Projekt wird die Topologie von geschlossenen Mannigfaltigkeiten untersucht, die eine skalarflache Metrik, aber keine Metrik mit positiver Skalarkrümmung zulassen. Während Mannigfaltigkeiten mit solch einer "stark skalarflachen" Metrik in kleinen Dimensionen topologisch vollständig klassifiziert sind, ist in großen Dimensionen nur wenig über ihre Topologie bekannt. Für eine einfach zusammenhängende stark skalarflache Mannigfaltigkeit M der Dimension $n \geq 5$ hat Futaki gezeigt, daß M eine Spin-Struktur zuläßt und der Index des Dirac Operators $\hat{A}(M)$ der Ungleichung $|\hat{A}(M)| \leq 2^{\frac{n}{4}}$ genügt. Weitere Hindernisse gegen die Existenz von stark skalarflachen Metriken wurden in [3] gefunden. Diese Hindernisse lassen sich zum Teil auch als Eigenschaften des freien Schleifenraum von M interpretieren.

(e) *Positive Krümmung, Symmetrie und elliptische Geschlechter*

Die Liste der bekannten einfach zusammenhängenden kompakten Mannigfaltigkeiten mit positiver Schnittkrümmung ist erstaunlich kurz. Neben den homogenen Beispielen, welche von Berger, Alloff-Wallach und Berard-Bergery klassifiziert wurden, finden sich auf der Liste nur noch die Biquotienten von Eschenburg und Bazaikin. Insbesondere sind in Dimension > 24 alle bekannten positiv gekrümmten Beispiele diffeomorph zu Rang 1 symmetrischen Räumen.

Hindernisse gegen positive Schnittkrümmung auf einfach zusammenhängenden kompakten Mannigfaltigkeiten liefern der Verschwindungssatz von Lichnerowicz-Hitchin und der Betti-Zahlensatz von Gromov. Motiviert durch die Hsiang-Kleiner Klassifikation positiv gekrümmter 4-Mannigfaltigkeiten mit positivem Symmetrierang ist es naheliegend, eine Klassifikation in Dimension > 4 unter Symmetrievoraussetzungen zu versuchen. Ein erster Schritt hierzu ist das Auffinden weiterer Hindernisse gegen positive Schnittkrümmung bei positivem Symmetrierang. In [6] wird gezeigt, daß der Index von gewissen getwisteten Dirac Operatoren verschwindet, falls die positiv gekrümmte Mannigfaltigkeit Spin ist und der Symmetrierang ≥ 2 ist. Diese Indizes treten als Koeffizienten der Fourierentwicklung des elliptischen Geschlechts auf. Hieraus läßt sich unter schwachen Symmetrievoraussetzungen die Existenz von positiv Ricci gekrümmten Mannigfaltigkeiten herleiten, die keine Metrik mit positiver Schnittkrümmung zulassen.

(f) *Elliptische Geschlechter und Gruppenwirkungen*

Anwendungen der Theorie der elliptischen Geschlechter auf Gruppen-Wirkungen finden sich in den Arbeiten [1, 2] sowie in den neueren Arbeiten [4, 5, 7]. In [4] werden Teilresultate zur Petrie Vermutung erzielt. In [5] werden Bordismus-Endlichkeitssätze für Mannigfaltigkeiten mit nicht abelscher Gruppenwirkung bewiesen. In [7] wird das elliptische Geschlecht für zyklische Gruppenwirkungen auf Spin-Mannigfaltigkeiten untersucht. Es werden Teilbarkeitsaussagen bewiesen, die einen Satz von Hirzebruch und Slodowy über Involutionsen verallgemeinern. Dieses Resultat findet Anwendung in der Untersuchung positiv gekrümmter Mannigfaltigkeiten mit Symmetrie (siehe Abschnitt (e)).

Stellung innerhalb des Graduiertenkollegs

Zur Bearbeitung und für das Verständnis von aktuellen Fragestellungen der Geometrie sind fundierte Kenntnisse von Topologie, Geometrischer Analysis und auch fortgeschrittener Physik (insbesondere Quantenfeld- und Eichtheorien) unerläßlich (siehe insbesondere auch den Fortsetzungsantrag im Teil A). Wir boten (und bieten) hier ein möglichst umfassendes Ausbildungsprogramm an:

Im Wintersemester 1998/99 haben wir (Lohkamp) eine Vorlesung zur Quantenfeldtheorie, mit der Zielsetzung einer Einführung in Witten's Beweis des Atiyah-Singer-Theorems zu geben, abgehalten, sowie eine Tagung in Sion zum Thema symplektische Geometrie und Seiberg-Witten-Invarianten durchgeführt. Ein anderes an der Schwelle zur Theoretischen Physik stehendes Thema ist die Quanten-Cohomologie und Symplektischen Topologie, hierzu gab es im Sommersemester 2000 eine Vorlesung (Lohkamp), die unter anderen den Non-Squeezing Satz von Gromov umfasst, der als eine der Wurzeln der Quanten-Cohomologie angesehen werden kann.

Es gab eine Reihe gemeinsamer Veranstaltungen (mit gemeinsamen Seminaren und Arbeitsgemeinschaften) mit den Arbeitsgruppen 4 (Hänggi/Linz), 5 (Eschenburg/Heintze) und 6 (Eckern/Ziegler). Hierzu zählen Seminare zur konvexen Integration, eine Tagung in Sion zum Thema Symplektische Untermannigfaltigkeiten gemeinsam mit der Arbeitsgruppe 5 (Eschenburg/Heintze), sowie mit Prof. Kotschick, LMU München, ebenso wie eine Tagung zur Quantenfeldtheorie, die im Anschluss an die bereits erwähnte Vorlesung stattfand und sich mit weiteren, insbesondere physikalischen, Aspekten von Witten's Beweis des Atiyah-Singer-Theorems befasste.

Der Kollegiat Dr. A. Dessai untersucht u. a. die aus der Quantenfeldtheorie motivierten elliptischen Geschlechter im Zusammenhang mit positiver Krümmung (siehe das Forschungsvorhaben im Teil C), was sowohl für die Arbeitsgruppen 5 (Eschenburg/Heintze) als auch 6 (Eckern/Ziegler) interessant ist. Hier verweisen wir auf Herrn Dessai's Forschungs- und Arbeitsbericht im Teil C.

Publikationen, die im Berichtszeitraum entstanden sind und in Zusammenhang mit dem Graduiertenkolleg stehen

- [1] A. N. Dessai, *Spin^c-Manifolds with Pin(2)-Action*, Math. Ann., Vol. 315 (4), S. 511-528 (1999).
- [2] A. N. Dessai, *Rigidity Theorems for Spin^c-Manifolds*, Topology, Vol. 39 (2), S. 239-258 (2000).
- [3] A. N. Dessai, *On the topology of scalar-flat manifolds*, Bull. London Math. Soc. 33, S. 203-209 (2001).
- [4] A. N. Dessai, *Homotopy complex projective spaces with Pin(2)-action*, erscheint in "Topology and its applications".
- [5] A. N. Dessai, *Bordism-finiteness and semi-simple group actions*, erscheint in "Geometriae Dedicata".
- [6] A. N. Dessai, *On the elliptic genus of positively curved manifolds with symmetry*, preprint math.DG/0104256 (archiv.org), Vorläufer erschien als Augsburg Report Nr. 438.
- [7] A. N. Dessai, *Cyclic groups actions and elliptic genera*, preprint math.GT/0104255 (archiv.org).
- [8] J. Lohkamp, *Scalar Curvature and Hammocks*, Math. Ann. 313, S. 385-407 (1999).
- [9] J. Lohkamp, *Curvature Contents of Geometric Spaces*, Proc. Int. Congr. Math., ICM '98, Invited Addresses, Vol. 2.
- [10] J. Lohkamp, *Linked Metrics on Three-Manifolds*, Preprint.
- [11] J. Lohkamp, *Negative Curvature and Symplectic Submanifolds*, Cont. Mathematics, Vol. 258, S. 285-292 (2000).
- [12] J. Lohkamp, *Generic Geometries on Three-Manifolds*, Preprint.

2 Liste der Stipendiaten und Kollegiaten

Die folgende Aufzählung enthält alle bisher dem Graduiertenkolleg angehörenden Stipendiaten und Kollegiaten in alphabetischer Reihenfolge. Die Angaben nach dem Namen betreffen jeweils 1. den Ort und den Zeitpunkt des ersten berufsqualifizierenden Abschlusses, 2. das Alter bei Eintritt ins Graduiertenkolleg, 3. den Zeitpunkt bzw. voraussichtlichen Zeitpunkt der Promotion, 4. den Förderzeitraum im Graduiertenkolleg (nur bei Stipendiaten) und 5. den Betreuer.

Name	erster Abschluss	Alter	Prom.	Förderdauer	Betreuer
Blömker, Dirk	Münster 04/97	26	04/00	04/97 – 04/98	Kielh./Maier-P.
Bock, Robert	Augsburg 02/94	28	12/98	—	Eschenburg
Böhm, Christoph	Augsburg 01/94	28	06/96	10/96 – 08/97	Eschenburg
Braak, Daniel	Bonn 09/90	34	07/95	—	Ziegler
Callenbach, Lars	Oldenburg 09/97	26	07/01	06/98 – 05/01	Hänggi/Linz
Christ, Ulrich	Augsburg 11/97	25	07/00	12/97 – 06/98	Heintze/Esch.
Dessai, Anand-N.	Bonn 01/92	31	07/96	—	Lohkamp
Eichhorn, Ralf	Würzburg 10/96	26	07/00	04/97 – 03/00	Hänggi/Linz
Gade, Renate	Heidelberg 06/86	35	01/91	—	Eckern
Gayer, Tobias	Augsburg 02/99	27	02/02	seit 11/99	Colonius
Groß, Christian	Darmstadt 10/91	32	07/95	09/97 – 08/99	Heintze
Grüne, Lars	Augsburg 02/94	29	12/96	01/97 – 09/97	Colonius
Grünvogel, Stefan	Augsburg 01/97	26	03/00	—	Colonius
Gugg, Christoph	Augsburg 11/97	25	12/00	—	Kielhöfer
Haase, Markus	Tübingen 05/97	27	—	03/98 – 03/99	Lohkamp
Hager, Wolfgang	Augsburg 11/96	28	—	12/96 – 05/97	Hänggi/Linz
Hiptmair, Ralf	München 11/92	29	06/96	—	Hoppe
Hoffmann, Andreas	Augsburg 04/99	27	10/02	—	Linz/Hänggi
Kalisch, Frieder	Heidelberg 12/98	26	04/02	seit 04/99	Ziegler
Keller, Stefan	Augsburg 03/95	27	12/99	08/97 – 09/99	Aulbach
Kieninger, Bernd	Augsburg 05/98	27	12/01	08/98 – 07/01	Aulbach
Kohler, Sigmund	Ulm 11/93	29	03/99	—	Hänggi
Kollross, Andreas	Augsburg 12/94	28	09/98	—	Heintze
Lehmann, Jörg	Augsburg 02/00	27	08/03	—	Hänggi
Leitner, Marianne	Leipzig 03/00	27	05/03	seit 06/00	Heintze/Ziegler
Linz, Stefan	Saarbrücken 10/84	37	07/89	—	Hänggi
Lüdecke, Marcus	Augsburg 06/97	28	09/01	10/99 – 06/01	Lohkamp
Mare, Augustin-L.	Cluj-Napoca 06/91	29	07/98	01/97 – 07/98	Eschenburg
Miller, Ulrich	Augsburg 07/99	27	07/02	seit 11/99	Maier-Paape
Nash, Eva	Würzburg 08/95	26	11/00	10/96 – 09/99	Hoppe
Osterloh, Andreas	Karlsruhe 10/96	27	08/00	05/97 – 04/00	Eckern
Pötzsche, Christian	Augsburg 09/98	27	12/01	seit 12/00	Aulbach
Raible, Martin	Hannover 07/97	29	07/00	—	Linz/Hänggi
Reimann, Peter	Basel 04/89	32	12/92	—	Hänggi
Reinhard, Bernd	Augsburg 05/97	28	09/01	09/99 – 08/01	Linz/Hänggi
Reißner, Ernst	Augsburg 09/93	28	09/98	10/96 – 03/98	Kielhöfer
Rivertz, Hans J.	Oslo 11/95	30	11/99	01/01 – 04/01	Eschenburg

Fortsetzung nächste Seite

Name	erster Abschluss	Alter	Prom.	Förderdauer	Betreuer
Samiou, Evangelia	Athen 10/97	31	10/97	—	Eschenburg
Schmid, Gerhard	Augsburg 02/00	26	08/03	—	Hänggi/Reim.
Siegmund, Stefan	Augsburg 07/96	26	09/99	10/96 – 09/01	Aulbach
Spichtinger, Peter	Augsburg 12/97	26	—	—	Lohkamp
Szolnoki, Dietmar	Augsburg 11/97	28	03/01	12/97 – 11/00	Colonius
Thorwart, Michael	Tübingen 07/96	28	07/00	10/96 – 03/97	Hänggi
Tzoukmanis, Niko	Augsburg 07/99	26	07/02	01/00 – 08/01	Kielhöfer
Wanner, Thomas	Augsburg 10/91	29	11/93	—	Kielh./Maier-P.
Wilhelm, Thomas	Berlin 06/92	31	07/97	10/97 – 03/99	Hänggi
Wohlmüt, Barbara	München 11/92	29	04/95	—	Hoppe

3 Auswahl der Stipendiaten und Kollegiaten

Es hat sich gezeigt, daß nach der zweijährigen Anlaufphase unseres Kollegs Ausschreibungen der freien Stipendien (etwa in der ZEIT oder den Physikalischen Blättern) nicht mehr nötig waren. Alleine auf Grund der Bekanntmachung freier Stellen auf der Internet-Homepage unseres Kollegs sind nämlich genügend (gemessen an der Zahl freier Stipendien) geeignete Bewerbungen eingegangen, und zwar 18 (davon 11 externe) auf Doktorandenstipendien und 7 (davon 6 externe) auf Stipendien für Postdoktoranden. Eine dieser Bewerbungen kam von einer Frau. Schließlich erhielten 9 Bewerber (davon 2 externe, davon 1 weiblich) Doktorandenstipendien und 2 (davon 1 externer) Postdoktorandenstipendien.

Die insgesamt 8 (internen) Kollegiaten (ohne Stipendium) wurden von den sie betreuenden Hochschullehrern vorgeschlagen und alle nach Vorstellungsvorträgen ins Kolleg aufgenommen.

4 Ausbildungsprogramm

Die Säulen des Ausbildungs- und Studienprogramms sind das wöchentlich stattfindende Graduiertenkolloquium sowie Vorlesungen und Seminare, deren Themen sich an der Zielsetzung des Kollegs orientieren. Dazu kamen ein spezielles Blockseminar und zwei jeweils zweitägige Klausurtagungen sowie eine Reihe von speziellen Veranstaltungen in Form von kleineren Fachtagungen und Workshops. Auf diese Veranstaltungen wollen wir hier und weiter unten im Abschnitt 7 “Gastwissenschaftlerprogramm” näher eingehen.

4.1 Graduiertenkolloquium

Das wöchentlich stattfindende Graduiertenkolloquium hat sich als das Herzstück des Kollegs etabliert. In dieser Veranstaltung, die von den Stipendiaten und Kollegiaten, insbesondere den Postdoktoranden, selbst organisiert wird, hatte sich jeder Stipendiat an Hand zweier Vorträge dem Kolleg vorzustellen. Die Idee dabei ist, daß der erste dieser beiden Vorträge eine für alle verständliche Einführung in das jeweilige Arbeitsgebiet gibt, während der zweite Vortrag die für das jeweilige Promotionsprojekt spezifischen Fragestellungen und Methoden vorstellt.

4.2 Vorlesungen

Das Angebot an Vorlesungen, die in erster Linie von den Mitgliedern des Graduiertenkollegs (zuweilen aber auch von Gästen oder Kollegiaten) gehalten wurden, orientierte sich an den Bedürfnissen der Stipendiaten und Kollegiaten. Im Rahmen der gegebenen Möglichkeiten (die z. B. durch Freisemester oder die Verpflichtung zu Anfänger- oder sonstigen Kursvorlesungen eingeschränkt waren) wurden über die ohnehin angebotenen Spezialvorlesungen auch speziell auf das

Graduiertenkolleg zugeschnittene Themen behandelt. Es folgt die Liste der im Berichtszeitraum für das Graduiertenkolleg angebotenen Vorlesungen:

WS 1998/99:

- Minimalflächen (mit Übungen) (Eschenburg)
- Quantenfeldtheorie (Lohkamp)
- Nichtlineare Dynamik I (mit Seminar) (Linz)
- Transporttheorie (mit Übungen) (Eckern)

SS 1999:

- Qualitative Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen (mit Übungen) (Aulbach)
- Algebraische Topologie (mit Übungen) (Eschenburg)
- Liegruppen und Liealgebren (Heber)
- Zufällige Mengen und Integralgeometrie (Heinrich, extern)
- Quantenfeldtheoretische Methoden (mit Übungen) (Ziegler)
- Nichtlineare Dynamik II (Linz)

WS 1999/00

- Partielle Differentialgleichungen (mit Übungen) (Kielhöfer)
- Stochastische Differentialgleichungen (mit Übungen) (Maier-Paape)
- Zufällige Irrfahrten (Heinrich, extern)
- Stochastische Methoden der Finanzmathematik (Heinrich, extern)
- Theorie der Phasenübergänge (Ziegler)
- Relativitätstheorie (mit Übungen) (Linz)
- Transporttheorie (mit Übungen) (Höck, extern)

SS 2000:

- Optimale Steuerung (mit Übungen) (Colonius)
- Riemannsche Geometrie II (Heintze)
- Globale Analysis (mit Übungen) (Lohkamp)
- Nichtlineare Analysis I (mit Übungen) (Kielhöfer)
- Stochastische Prozesse (Heinrich, extern)
- Thermodynamik und Statistische Physik (mit Übungen) (Hänggi)
- Mathematische Methoden der Physik (für Fortgeschrittene) (Linz)

WS 2000/01

- Differenzgleichungen und diskrete Dynamik I (mit Übungen) (Aulbach)
- Algebraische Topologie (Eschenburg)
- Liegruppen (mit Übungen) (Heintze)
- Technologische Anwendungen wissenschaftlichen Rechnens (mit Übungen) (Hoppe)
- Finanz- und Wirtschaftsmathematik (mit Übungen) (Hoppe)

- Nichtlineare Analysis II (mit Übungen) (Kielhöfer)
- Einführung in das wissenschaftliche Rechnen (Bungartz)
- Klassische Feldtheorie (mit Übungen) (Linz)
- Transporttheorie (mit Übungen) (Kampf, extern)

SS 2001:

- Differenzgleichungen und diskrete Dynamik II (mit Übungen) (Aulbach)
- Variationsrechnung (mit Übungen) (Kielhöfer)
- Wissenschaftliches Rechnen (mit Übungen) (Bungartz)
- Computergraphik und Visualisierung (Bungartz)
- 4-dimensionale Topologie (Lohkamp)
- Modelle der Räumlichen Statistik (Heinrich, extern)
- Elektrodynamik (mit Übungen) (Hänggi)
- Physik ungeordneter Systeme (mit Übungen) (Ziegler)
- Mathematische Modellierung zellbiologischer Prozesse (Reimann)

4.3 Seminare und Arbeitsgemeinschaften

Über die üblichen Ober-, Diplomanden- und Mitarbeiterseminare hinaus wurden die folgenden, speziell auf das Graduiertenkolleg zugeschnittenen Seminare bzw. Arbeitsgemeinschaften abgehalten:

WS 1998/99:

- Seiberg-Witten-Invarianten (Eschenburg/Heintze/Lohkamp)
- Konstruktive Kontrolltheorie (Colonius)
- Modellierung und Simulation mikroelektronischer Strukturen und Systeme (Hoppe)

SS 1999:

- Geometrische Analysis (Lohkamp)
- Topologie homogener Räume (Eschenburg/Dessai)
- Numerik stochastischer Differentialgleichungen (Blömker/Gugg/Nash/Raible)

WS 1999/00

- Molekulare Dynamik (Hoppe)
- Geometrische Analysis (Lohkamp)
- Relativitätstheorie (Linz)

SS 2000:

- Modellierung und Simulation elektronischer Bauteile (Hoppe)
- Statistische Mechanik (Hänggi)

WS 2000/01

- Liehalbgruppen und Kontrollmengen (Colonus/Heintze)
- Topologie (Lohkamp)
- Nichtlineare Dynamik (Linz)

SS 2001:

- Wissenschaftliches Rechnen (Bungartz/Hoppe)
- Geometrie und Topologie (Lohkamp)
- Feldtheoretische Methoden in der kondensierten Materie (Ziegler)

4.4 Blockseminar „Anwendungen des Atiyah-Singer-Index-Theorems in der theoretischen Physik“

Da es ein besonderes Anliegen unseres Kollegs ist, den interdisziplinären Dialog zwischen Mathematik und Physik zu intensivieren, haben wir ein mehrtägiges Blockseminar zu einem Thema veranstaltet, das gleichermaßen Mathematiker wie Physiker interessiert. Es ging dabei darum, den topologischen Hintergrund des Quantum-Hall-Effekts (QHE) aufzuarbeiten und die Argumente auf eine diskrete Theorie (Dirac-Fermionen) zu übertragen. Konkretes Ziel war es, das mathematisch-physikalische Umfeld des Atiyah-Singer-Index-Theorems zu verstehen. Grundlage waren die 'Lectures on Quantum Mechanics and the Index Theorem' des Physikers Orlando Alvarez aus dem Jahre 1995.

Da es sich bei diesem Seminar gewissermaßen um ein Musterbeispiel einer interdisziplinären Zusammenarbeit in unserem Kolleg handelt, geben wir hier einen ausführlichen Bericht:

- Die Diplomandin Natalia Schneible eröffnete das Programm mit einer Einführung in die Lagrangesche und die Hamiltonsche Mechanik über einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M . Die klassische Wirkung ist als das Integral

$$I[q] = \int_I dt L(q(t), \dot{q}(t))$$

der Lagrange-Funktion längs eines Weges $q : I \rightarrow M$ gegeben ($I \subseteq \mathbb{R}$ wird als Zeitintervall interpretiert). Nach dem Lagrangeschen Wirkungsprinzip sind die Bewegungsgleichungen eines sich bewegenden 1-Punkt-Teilchens (in der Quantenmechanik Prototyp eines bosonischen Systems) gerade die Euler-Lagrange-Gleichungen, die genau dann erfüllt sind, wenn der Weg ein Extremal des Wirkungsfunktionalis ist. Man betrachtet also Variationen glatter Wege.

Bei der Identifikation $TM \cong T^*M$ (Legendre-Transformation) wird die Lagrangesche in die Hamiltonsche Mechanik übergeführt, wo nun die Hamiltonsche Version des Wirkungsprinzips die (zu den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen assoziierte) kanonische symplektische Struktur der Mannigfaltigkeit T^*M liefert. Die Poisson-Klammer (PB) versieht die Algebra der Funktionen auf T^*M mit einer Lie-Algebren-Struktur. Bei der einfachsten ('naiven') Quantisierung übersetzen sich die Poissonklammeridentitäten der klassischen Variablen in Kommutatoridentitäten der diesen entsprechenden Operatoren auf dem betrachteten Hilbertraum \mathcal{H} .

- Der Kollegiat Dr. Ulrich Christ schloß mit der Behandlung eines in der Quantenmechanik definierten 1-Fermion-Systems an. Ist das Elektron im \mathbb{R}^3 einem Magnetfeld \vec{B} ausgesetzt, so ist der Hamilton-Operator ein hermitescher Operator auf dem Raum nur noch zweier Zustände $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ (Fock-Raum) und hat eine Darstellung bzgl. der Komponenten von \vec{B} in

Pauli-Matrizen (Pauli-Gleichung). Um das zugehörige klassische System aufzustellen, wurde das fermionische Wirkungsintegral analog zum bosonischen, nun jedoch in Abhängigkeit zweier (eielementiger Sets) miteinander antikommutierender Graßmann-Variablen (welche man als zueinander konjugiert betrachten kann), eingeführt. Dann konnten die Euler-Lagrange-Gleichungen abgeleitet und die Hamiltonsche Dynamik (durch Imitation der symplektischen Geometrie gewöhnlicher Mannigfaltigkeiten) rekonstruiert werden. Das Graßmannsche klassische System ist durch Antikommutatorrelationen zu quantisieren (Fermionsches Quantisierungsprinzip). Die Wahl dreier nichtkomplexer Graßmannvariablen führte auf die Clifford-Algebra über dem \mathbb{R}^3 und genau den Paulischen Hamilton-Operator.

- Prof. Eschenburg führte das Konzept fort, indem er nun auch die Bewegung der Fermionen miteinbezog. Wir betrachteten eine spezielle Lagrange-Funktion für ein sich frei bewegendes Halb-Spin-Teilchen,

$$L = \frac{1}{2} \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle + \frac{i}{2} \langle \psi, \frac{D}{Dt} \psi \rangle \quad (1)$$

die in einen Anteil, der von der Translation herrührt, und in einen Spin-Anteil zerfällt. Unter einem sehr speziellen Typ von Variation, welche gerade (x) und ungerade (ψ) Variablen mischt (Supersymmetrie (SUSY)), bleibt die Lagrange-Funktion (1) erhalten. Die Transformation wird von der sog. Noetherschen Ladung Q (hier: 'Superladung') erzeugt. Da L nicht explizit zeitabhängig ist, ist Q eine Konstante der Bewegung: $\frac{dQ}{dt} = 0$ (Noethersches Theorem). Der Kommutator zweier solcher SUSY-Transformationen liefert das infinitesimale Erzeugende der Zeittranslation, und weil L nicht explizit zeitabhängig war, ist dann die Poisson-Klammer der beiden transformationserzeugenden Ladungen – die Noethersche Ladung desselben Kommutators – gerade die Hamilton-Funktion.

Unter Quantisierung (Darstellung der Poisson-Algebra als Operatoralgebra auf dem Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{2n}) \otimes \mathbb{C}^{2^n}$) wird die Noethersche Ladung in den Dirac-Operator auf dem \mathbb{R}^{2n} übergeführt, und sein Quadrat (Antikommutator) liefert den Hamiltonoperator.

- Der Stipendiat Markus Lücke betrachtete dann einen elliptischen Differentialoperator $D : C^\infty(M, E_+) \rightarrow C^\infty(M, E_-)$ für zwei glatte Vektorraumbündel (gleichen Ranges) über einer Mannigfaltigkeit M . Ist M kompakt, so ist D Fredholm, und der Index ist definiert als

$$Index(D) := \dim[ker(D)] - \dim[coker(D)] . \quad (2)$$

Diese analytische Größe ist stabil unter stetiger Variation von D in der Klasse elliptischer Operatoren (während die Dimensionen rechts springen können) und hängt tatsächlich nur von der regulären Homotopieklasse des Hauptsymbols ab.

Die (bzgl. einer Bündelmetrik) formal selbst-adjungierten Operatoren D^*D und DD^* besitzen dieselbe Folge nichtnegativer Eigenwerte, und zwischen den Eigenräumen zu den positiven Eigenwerten λ_j bzw. μ_k vermittelt D einen Isomorphismus. Also erhält man für die Differenz der Wärmeleitungskerne

$$Trace(e^{-\beta D^*D}) - Trace(e^{-\beta DD^*}) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\beta \lambda_j} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\beta \mu_k}$$

die Differenz der Dimensionen der Nulleigenräume. Die Identitäten $ker(AA^*) = ker(A^*) = coker(A)$ für $A = D, D^*$ liefern aber in (2)

$$Index(D) = Trace(e^{-\beta D^*D}) - Trace(e^{-\beta DD^*}) ,$$

offensichtlich unabhängig von der Wahl von $\beta > 0$. Auf dem Bündel $E := E_+ \oplus E_-$ erhält man für die Operatoren $H = (iQ)^2$ mit $iQ = \begin{pmatrix} 0 & D \\ D^* & 0 \end{pmatrix}$ und $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

schließlich

$$Index(D) = Trace(\Gamma e^{-\beta H}) . \quad (3)$$

- Prof. Lohkamp stellte den Pfadintegral-Zugang zur Quantenmechanik am Beispiel des harmonischen Oszillators vor. Während die klassische Mechanik die eindeutig bestimmte Trajektorie des Teilchens – Minimum des Wirkungsfunktional – ermittelt, berechnet man nun eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem unendlich-dimensionalen Raum aller möglichen Wege. Über diesem ist also ein Integral bzgl. eines Unendlichen-Produkt-Maßes $[Dq]$ (als ein projektiver Limes) zu definieren (Pfadintegral). Ziel dieses Kapitels war es, die Spur (3) durch das Pfadintegral

$$Index(Q) = \int_{PBC} [Dq] e^{-I}$$

für $I := \int_0^\beta dt L$ ($\beta > 0$ beliebig) auszudrücken. Leider traten dabei erhebliche analytische Schwierigkeiten zutage, die im Seminar nicht geklärt werden konnten.

- Prof. Heintze und der Kollegiat Peter Spichtinger formulierten in ihrem gemeinsamen Vortrag die Atiyah-Singer-Index-Formel für den Dirac-Operator Q über einer $d=2n$ -Spin-Mannigfaltigkeit M :

$$Index(Q) = \int_M \hat{A}(M)$$

Ausgangspunkt ist die Pfadintegraldarstellung des Index,

$$Index(Q) = \int_{PBC} [Dx][D\psi] e^{-I} \quad (4)$$

für $I := \int_0^\beta dt L$, wobei $\beta > 0$ beliebig war. Zur Berechnung von (4) für $\beta \searrow 0$ genügt es, die Entwicklung der Lagrange-Funktion (1) um konstante Kurven bis zur Ordnung 2 zu betrachten (Methode des steilsten Abstiegs). Rechnungen in lokalen Koordinaten führen schließlich auf den in x_j quadratischen Ausdruck

$$\prod_{j=1}^{d/2} \frac{x_j/2}{\sinh(x_j/2)} =: \hat{A}(M)$$

(wobei $\pm ix_j$ die Eigenwerte der Krümmungs-2-Form sind), der die zum \hat{A} -Geschlecht gehörige Form definiert. Da nun alle Punkte in M Punktkurven sind, hat man schließlich noch über M zu integrieren, und erhält (4).

- Der Kollegiat Dr. Anand Dessai gab zunächst eine kurze Einführung in die charakteristischen Klassen. In einer von der vorangehenden verschiedenen Behandlung des Integrals (4) führt Ausführung der $[D\psi]$ -Integration auf die sogenannte Pfaffsche des schiefsymmetrischen Operators $[\frac{D}{Dt}]$ (die Integration findet dann nur noch bzgl. des bosonischen Maßes über dem Schleifenraum $L(M)$ von M statt).

Sei nun M einfach zusammenhängend. Dann ist diese Pfaffsche zu generischem $\gamma_0 \in L(M)$ definiert als

$$Pf\left(\frac{D}{Dt}\right)(\gamma_0) := \prod_{\lambda_n > 0} \lambda_n(\gamma_0) \neq 0 ,$$

wobei $\pm i\lambda_n \in i\mathbb{R}$ die Eigenwerte des Operators $\frac{D}{Dt}$ sind.

Betrachte dann den spektralen Fluß zu einer geschlossenen Homotopie $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ in $L(M)$. Die einzig mögliche Uneindeutigkeit der Pfaffschen von $\frac{D}{Dt}$ besteht im Auftreten eines Vorzeichenwechsels $Pf\left(\frac{D}{Dt}\right)(\gamma_0) = -Pf\left(\frac{D}{Dt}\right)(\gamma_1)$.

Falls $\pi_1(L(M)) = 0$, so ist die Paffsche (und damit das Pfadintegral über $L(M)$) wohldefiniert. Wegen $\pi_1(M) = 0$ hat man die beiden Isomorphismen $\pi_1(L(M)) \cong \pi_2(M) \cong H_2(M; \mathbb{Z})$. Alvarez zufolge ist bereits das Verschwinden von $w_2(M) := w_2(T_{\mathbb{R}}M) \in H^2(M; \mathbb{Z}_2) [\cong H_2(M; \mathbb{Z}_2)]$ (also die Existenz einer Spin-Struktur über M) hinreichend für die Eindeutigkeit.

- Der Stipendiat Frieder Kalisch gab eine Einführung zum Quanten-Hall-Effekt (QHE). Legt man (im Modell) senkrecht zu einem elektrischen Feld \vec{E} in der Ebene ein konstantes starkes Magnetfeld \vec{B} an, so kommt es zu einer Ablenkung der Elektronen auf radiale Bahnen um die Magnetachsen, wobei nur den diskreten Energie-Niveaus der Ladungsträger (Landau-Levels) entsprechende quantisierte Radien auftreten. Aufgrund der Translationsinvarianz des Systems ist jedes Landau-Level stark entartet. Aus seiner Ladungsträgerdichte und der Ablenkungsgeschwindigkeit berechnet sich die Hall-Strom-Dichte, und diese führt auf eine (bis auf physikalische Konstanten) ganzzahlige Hall-Leitstärke, wenn man voraussetzt, daß der höchste besetzte Zustand (die Fermi-Kante) in einem 'gap' zwischen zwei Landau-Levels situiert ist. Dieses 'Stufenverhalten' der Hall-Leitstärke erweist sich in Experimenten als äußerst robust gegenüber Störungen.
- Daran schloß sich der Vortrag der Stipendiatin Marianne Leitner auf Grundlage eines Artikels von Mahito Kohmoto aus dem Jahre 1984 an, in welchem der Beitrag eines Energie-Bandes zur Hall-Leitstärke mit einer topologischen Invariante eines zu definierenden $U(1)$ -Hauptfaserbündels über einem Torus zusammenfällt. Die Idee war es, die im Experiment erfahrene Stabilität dieser Größe gegenüber Unordnungen durch diese Identifikation zu erklären. Der physikalische Ansatz (Nakano-Kubo-Formel) zur Berechnung der Hall-Leitstärke ist jedoch nur anwendbar, wenn das jeweils betrachtete Energieband isoliert ist. Diese Bedingung ist mathematisch bis heute weitgehend unverstanden.

Kohmotos Arbeit zeigt, daß der im Experiment am Rand eines Ladungsträgers gemessene Hall-Strom tatsächlich kein Randphänomen ist, da er auf einer geschlossenen (d.h. unberandeten) Mannigfaltigkeit durch einen nichtrivialen Krümmungsausdruck nachgewiesen werden kann.

- Der Kollegiat Dr. Daniel Braak stellte dann den Index-Zugang für 'offene' Ein-Elektron-Systeme auf der Basis einer Arbeit von J. E. Avron, R. Seiler und B. Simon aus dem Jahr 1990 vor: Wir betrachteten die Spektralprojektionen P bzw. Q des jeweiligen Hamilton-Operators auf die 1-Teilchen-Zustände unterhalb der Fermi-Kante vor bzw. nach Erhöhung des Flusses um ein Einheitsquantum; die Hall-Leitstärke ist die dabei transportierte Ladungsmenge. Der relative Index wird als eine Verallgemeinerung des Ausdrucks $\text{Trace}(P - Q) = \dim(P) - \dim(Q)$ auf unendlich dimensionale Hilbert-Räume (falls $(P - Q)$ kompakt ist) eingeführt:

$$\text{Index}(P, Q) := \dim(\text{Ran}(P) \cap \text{Ran}(Q)^\perp) - \dim(\text{Ran}(Q) \cap \text{Ran}(P)^\perp)$$

und ist der Index einer Abbildung $\text{Ran}(P) \rightarrow \text{Ran}(Q)$. Falls $(P - Q)^{2n+1}$ Spurklasse ist, so erhält man

$$\text{Index}(P, Q) = \text{Trace}(P - Q)^{2n+1}, \quad (5)$$

unabhängig von n , falls n nur hinreichend groß ist. Im Kontext des Hall-Effekts geht Q durch eine unitäre Transformation aus P hervor, $Q = UPU^*$. Wenn dann bereits $(P - Q)$ Spurklasse ist, so ist der relative Index Null: P ist von derselben Dimension wie jede seiner unitären Transformationen. Die rechte Seite von (5) läßt sich für die spezielle Wahl von Q aber als die Nakano-Kubo-Formel schreiben. Eine nichttriviale Hall-Leitstärke erhält man also aus zwei Projektionen, die sich um ein Kompaktum voneinander unterscheiden, welches jedoch nicht Spurklasse ist. Das System muß 'offen' sein: Im Gegensatz zu den Betrachtungen über einer geschlossenen Mannigfaltigkeit müssen nun unendlich viele Zustände unterhalb der Fermi-Kante besetzt sein.

- Den letzten Vortrag hielt Prof. Ziegler über den nach seinen Entdeckern 1979 benannten Aharonov-Casher-Effekt. Wir betrachteten ein Teilchen mit halbem Spin in einem Magnetfeld $\vec{B} \equiv \vec{B}(x, y)$ senkrecht zur Ebene. Obwohl \vec{B} nicht räumlich konstant ist, ist zumindest die Nullenergie entartet, wobei der Entartungsgrad nur von einer topologischen Eigenschaft von \vec{B} , dem magnetischen Fluß (das Flächenintegral über \vec{B}), abhängt. Aus einem Ansatz für die physikalisch zulässigen Wellenfunktionen zusammen mit Konvergenzargumenten berechneten wir die Anzahl der Nullmoden, von der man hier annehmen sollte, daß sie sich proportional zur Leitfähigkeit verhält.

Resümierend lässt sich feststellen, daß das Seminar die Teilnehmer zwar mit den grundlegenden Fragen zum Quantum-Hall-Effekt vertraut gemacht hat, auf der anderen Seite aber nur zu wenigen mathematisch rigorosen Aussagen geführt hat. Insbesondere hat es sich gezeigt, daß der Pfadintegralzugang auf mathematisch nur unzureichend entwickelten Methoden beruht und daher weiterer Untersuchung von Seiten der Mathematik bedarf. Es ist geplant, das Thema in Zusammenarbeit der Arbeitsgruppen 5 (Heintze/Eschenburg, Mathematik) und 6 (Eckern/Ziegler, Physik) weiter zu verfolgen, und zwar im Rahmen des Promotionsprojekts der Stipendiatin Marianne Leitner.

4.5 Klausurtagungen auf der Reisenburg

Am 30./31.5.2000 und am 7./8.5.2001 fanden auf Schloß Reisenburg Klausurtagungen des Graduiertenkollegs statt, an der alle Mitglieder und Stipendiaten sowie die meisten der Kollegiaten teilnahmen. Zweck dieser Veranstaltungen war, die am Kolleg beteiligten Hochschullehrer und Nachwuchswissenschaftler über einen längeren Zeitraum an einen Tisch zu bringen, um den aktuellen Stand der in Arbeit befindlichen Promotions- und Forschungsprojekte zu diskutieren und die weitere Zusammenarbeit zwischen den verschiedenen Arbeitsgruppen aus Mathematik und Physik zu koordinieren.

Über den intensiven fachlichen Informationsaustausch hinaus boten diese Zusammenkünfte fernab von der alltäglichen Institutsarbeit auch die Möglichkeit, die persönlichen Beziehungen der am Kolleg beteiligten Personen untereinander zu pflegen. Die stets angenehme Atmosphäre in unserem Kolleg scheinen wir nicht zuletzt diesen Klausurtagungen zu verdanken.

Es folgt die Liste der jeweils halbstündigen Vorträge, die von den Stipendiaten und Kollegiaten während der beiden genannten Klausurtagungen gehalten wurden:

4.5.1 Klausurtagung am 30. und 31. Mai 2000 :

- Stefan Siegmund, "Nichtautonome Dynamische Systeme"
- Bernd Kieninger, "Nichtkontraktive Iterierte Funktionensysteme: Fraktale, Chaos und p-balanzierte Maße"
- Christian Pötzsche, "Robustheit exponentieller Dichotomien für lineare dynamische Gleichungen"
- Frieder Kalisch, "Dirac-Fermionen mit Unordnung in 2D: Feldtheorie und Sattelpunkte"
- Andreas Osterloh, "Verallgemeinerte Austauschstatistik und Integrabilität"
- Marcus Lüdecke, "Negative Skalarkrümmung und C^k -nahe Metriken"
- Niko Tzoukmanis, "Variationsprobleme in den Materialwissenschaften"
- Ulrich Miller, "Bewertung von europäischen Optionen im Black-Scholes-Modell"
- Christoph Gugg, "Approximation der 3D-Navier-Stokes-Gleichung"
- Dirk Blömker, "Musterbildung durch Rauschen"

- Bernd Reinhard, “Verweilzeiten in der dynamischen Kingdon Falle”
- Lars Callenbach, “Synchronisation Dynamischer Systeme”
- Ralf Eichhorn, “Ein Ansatz zum Ausschluss chaotischer Bewegung in einfachen dynamischen Systemen”

4.5.2 Klausurtagung am 7. und 8. Mai 2001 :

- Frieder Kalisch, “Transfermatrizen für ungeordnete Dirac-Fermionen in zwei Dimensionen”
- Marianne Leitner, “Das Bündel der Eigenfunktionen des Bloch-Hamilton-Operators”
- Tobias Gayer, “Analyse und Numerik der Escape-Gleichung”
- Niko Tzoukmanis, “Young’sche Maße für ein Variationsproblem mit nichtlokalem Term”
- Christoph Gugg, “Wachstum dünner Schichten: Rauigkeit und Korrelationsfunktionen”
- Ralf Eichhorn, “Absolute negative Mobilität”
- Nguyen Chanh Dinh, “Motion of level sets with speed depending on mean curvature”
- Stefan Siegmund, “Nichtautonome Dynamische Systeme”
- Christian Pötzsche, “Langsame Mannigfaltigkeiten diskretisierter singulär gestörter gewöhnlicher Differenzialgleichungen”
- Bernd Kieninger, “Iterierte Funktionensysteme auf kompakten Hausdorffräumen”
- Bernd Reinhard, “Bewegung in dynamischen Fallen – eine Übersicht von Methoden, Ergebnissen und zentralen Problemen”
- Lars Callenbach, “Frequenz- und Phasensynchronisation chaotischer Oszillatoren”
- Marcus Lüdecke, “Vom Öffnen positiv skalar gekrümmter Mannigfaltigkeiten: Kontrolle von Volumen und Krümmung”
- Martin Raible, “Amorphes Schichtwachstum: Simulation und Modellierung”

5 Vergabe der Koordinationsmittel

Die Koordinationsmittel wurden in Form von Hilfskraftverträgen zu gleichen Teilen an die Herren Bernd Kieninger, Christian Pötzsche und Stefan Siegmund vergeben. Dafür übernahmen diese drei Stipendiaten bzw. Kollegiaten – in enger und ständiger Absprache mit dem Sprecher des Graduiertenkollegs – alle anfallenden Koordinationsaufgaben, und zwar sowohl die rein organisatorischen als auch die wissenschaftsbezogenen.

6 Interne Erfolgskontrolle des Kollegs

Die erste Hürde beim Eintritt ins Graduiertenkolleg bestand aus einem Vorstellungsvortrag, dem sich ein Gespräch mit mehreren dem Kolleg angehörenden Hochschullehrern anschloß. Dabei kamen insbesondere die Vorstellungen des Bewerbers zur Sprache, die seine Einbindung ins Graduiertenkolleg und seine Kooperationsbereitschaft betrafen. Nach Aufnahme ins Kolleg hatte jeder Doktorand regelmäßig seinem Betreuer über den Fortgang des Promotionsvorhabens zu berichten. Darüberhinaus war er verpflichtet, turnusmäßig im Graduiertenkolloquium einen Vortrag über den aktuellen Stand seiner Arbeiten zu halten. Im Umfeld dieser Veranstaltung fand im übrigen auch der gedankliche Austausch mit den anderen Doktoranden und Postdoktoranden des Graduiertenkollegs statt, was bei jedem Einzelnen sowohl zu einer Art Selbstkontrolle

als auch zur Bewertung durch die Anderen führte. Im Berichtszeitraum fanden zudem zwei jeweils zweitägige Klausurtagungen statt, bei der jeder Stipendiat einen Vortrag halten und in der anschließenden Diskussion allen dem Kolleg angehörenden Hochschullehrern, Stipendiaten und Kollgiaten Rede und Antwort stehen mußte.

Insgesamt ist festzustellen, daß das Graduiertenkolleg – anders als die traditionelle Art des Promovierens – eine Reihe von Mechanismen der Kontrolle, der Motivation und des Informationsaustauschs beinhaltet, die eine Straffung des Promotionsstudiums erwarten lassen.

7 Gastwissenschaftlerprogramm

Im dreijährigen Berichtszeitraum umfaßte das Gastwissenschaftlerprogramm einen Workshop, ein Minisymposium, sieben Gastvorlesungen bzw. Vortragsreihen sowie zahlreiche Einzelvorträge und Kurzaufenthalte.

Es folgt die Beschreibung dieser Veranstaltungen im einzelnen.

7.1 Workshop “Dynamics Days”

In der Zeit vom 15. bis 17. Dezember 1999 fand der Workshop “Dynamics Days” statt, in dem neben 4 auswärtigen auch 2 Wissenschaftler des Graduiertenkollegs vortrugen. Die 10 Vorträge hatten verschiedene Aspekte der qualitativen Theorie dynamischer Systeme zum Thema, insbesondere Stabilität, asymptotisches Lösungsverhalten, Normalformen und Verzweigung.

Das Programm in der Übersicht:

- 15. 12. 1999, Prof. Dr. Alexander Kopanskii, Chisinau/Moldavien, “The concept of normal forms. Formal theory”
- 15. 12. 1999, Prof. Dr. Michal Feckan, Bratislava/Slovakei, “Homoclinic Hopf interaction. An autoparametric bifurcation”
- 16. 12. 1999, Prof. Dr. Alexander Kopanskii, “The deformation method. Sternberg theory”
- 16. 12. 1999, Dr. Stefan Siegmund, Augsburg, “Smooth foliations of extended state spaces”
- 16. 12. 1999, Prof. Dr. Fritz Colonius, Augsburg, “The Hartman-Grobman Theorem for control systems”
- 16. 12. 1999, Prof. Dr. Michal Feckan, “Transversal bounded solutions in systems with normal and slow variables”
- 16. 12. 1999, Prof. Dr. Alexander Kopanskii, “Simplification of resonant polynomial vector fields”
- 17. 12. 1999, Prof. Dr. Yan Weiping, Taiyuan/China, “Stability and attractivity of difference equations”
- 17. 12. 1999, Prof. Dr. Pham Chi Vinh, Hanoi/Vietnam, “Semigroups and solutions of quasi-linear equations in $C_b(B)$ and $L_p(B)$ ”
- 17. 12. 1999, Prof. Dr. Alexander Kopanskii, “Normal forms of vector fields near invariant manifolds”

7.2 Minisymposium “Discrete Dynamics”

Im Rahmen der “Sixth International Conference on Difference Equations and Applications” fand in Augsburg am 30. und 31. 7. 2001 ein Minisymposium zum Thema “Discrete Dynamics” statt, bei dem 12 auswärtige Wissenschaftler und 3 Angehörige des Graduiertenkollegs Vorträge hielten.

Allen Vorträgen lag die Idee zu Grunde, Methoden aus der klassischen Theorie der Differenzengleichungen zum Lösen aktueller Probleme aus dem Bereich der diskreten dynamischen Systeme einzusetzen.

Das Programm in der Übersicht:

- 30.07.2001, Prof. Dr. Aleksandr Sharkovsky, Kiev/Ukraine, “Difference Equations and Boundary Value Problems”
- 30.07.2001, Prof. Dr. George Sell, Minneapolis/USA, “Longtime Dynamics and Time Discretizations with Applications to Some Special Differential Equations”
- 30.07.2001, Prof. Dr. Donato Trigiante, Florenz/Italien, “On the essential discreteness of many physical laws”
- 30.07.2001, Prof. Dr. Vladimir Fedorenko, Kiev/Ukraine, “Farey’s rule for bifurcations of periodic trajectories in a class multi-valued interval maps”
- 30.07.2001, Prof. Dr. James Muldowney, Edmonton/Kanada, “Implications of Bendixson Conditions for Difference Equations”
- 30.07.2001, Prof. Dr. Ben Mestel, Exeter/England, “Golden mean renormalisation for a generalised Harper equation: the Ketoja-Satija Orchid”
- 30.07.2001, Prof. Dr. Prabhakar Vaidya, Bangalore/Indien, “Proof of the Existence of Nonergodic Wandering Orbits in the Tent and Related Maps”
- 31.07.2001, Prof. Dr. Ludwig Arnold, Bremen, “Iteration of random mappings”
- 31.07.2001, Prof. Dr. Peter Kloeden, Frankfurt, “The perturbation of attractors of skew-product difference systems with a shadowing driving system”
- 31.07.2001, Dr. Stefan Siegmund, Augsburg, “Computation of Nonautonomous Invariant Manifolds”
- 31.07.2001, Prof. Dr. Victor Kozyakin, Moskau/Russland, “Asynchronous systems: an intersection point of ‘easy questions’ with difficult solutions”
- 31.07.2001, Dr. Bernd Reinhard, Augsburg, “Parametric Modulation of the Delayed Logistic Map”
- 31.07.2001, Dr. Karsten Keller, Greifswald, “Symbolic dynamics of distance-doubling maps”
- 31.07.2001, Dipl.-Math. Bernd Kieninger, Augsburg, “Iterated Function Systems on Compact Hausdorff Spaces”
- 31.07.2001, Prof. Dr. John Schinas, Xanthi/Griechenland, “Some applications of the KAM theory to Difference Equations”

7.3 Gastvorlesungen

Im Berichtszeitraum fanden die folgenden 7 Gastvorlesungen bzw. Vortragsreihen statt:

7.3.1 Prof. Dr. Stefan Klaus vom Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach hielt in der Zeit vom 7. bis 9. 7. 1999 und 28. bis 31. 3. 2000 zwei Vortragsreihen über “Höhere Kohomologieoperationen”.

7.3.2 Eine dreiteilige Vortragsreihe zum Thema “Loop group approach to integrable systems in geometry” hielt Prof. Francis Burstall aus Bath/England im Sommer 1999. Er zeigte, wie alte und neue Geometrie mit Hilfe von Abbildungen in Schleifengruppen verstanden werden kann. Zu den Anwendungen gehören harmonische Abbildungen von Flächen ebenso wie isotherme Flächen und Christoffel-Transformationen.

7.3.3 Prof. Matthias Schwarz aus Chicago und Leipzig hielt im November 1999 eine Vortragsreihe zum Thema "Morse-Theorie und symplektische Invarianten", in der er einen Morse-theoretischen Zugang zur Floer-Homologie vorstellte. Er berichtete dabei über Morse-Komplex und Morse-Homologie, angewandt auf ein Funktional auf symplektischen Mannigfaltigkeiten.

7.3.4 Im September 2000 war Prof. Natan Andrei von der Rutgers University vier Wochen an der Universität Augsburg zu Gast. In seiner Gastvorlesung gab er eine Einführung in integrable Modelle, insbesondere das eindimensionale Hubbard-Modell und dessen Lösung mit Hilfe des Bethe-Ansatzes. Ferner behandelte er die quantenmechanische Version der ursprünglich für das Randwertproblem der KdV-Gleichung entwickelten inversen Streumethode.

7.3.5 Prof. Stefan Müller vom Max-Planck-Institut Leipzig hielt im November 2000 eine dreiteilige Vortragsreihe zu den Themen "Mikrostruktur in Kristallen – Anwendungen und mathematische Fragen", "Mehrskalenprobleme im Mikromagnetismus – eine Herausforderung für die Analysis" und "Elliptische Systeme mit nirgends glatten Lösungen".

7.3.6 Im Juni 2001 fand eine Vortragsreihe über "Positive Krümmung und Symmetrie" statt. Die Vortragenden und ihre Vortragstitel waren: Dr. K. Shankar (Ann Arbor), "Positively Curved manifolds with symmetry", Dr. D. Gromoll (Stony Brook), "Metriken mit nichtnegativer Krümmung auf Vektorbündeln", Dr. B. Wilking (Philadelphia), "Group Actions on Manifolds of Positive Sectional Curvature", Dr. K. Tapp (Stony Brook), "Conditions for Nonnegative Curvature on Bundles".

7.3.7 Im Juli 2001 hielt Prof. Saber Elaydi von der Trinity University in San Antonio/Texas eine Gastvorlesung über asymptotische Methoden bei linearen Differenzgleichungen. Neben einer Einführung in die klassischen Aspekte dieser Theorie zeigte er anhand eines Beispiels aus der aktuellen Forschungstätigkeit der physikalischen Arbeitsgruppe 6 (Eckern/Ziegler), wie man die klassischen mathematischen Methoden weiterentwickeln und auf bestimmte Gleichungen aus der Physik der Vielteilchensysteme anwenden kann.

7.4 Gastvorträge und Kurzaufenthalte

Im Berichtszeitraum (1.9.1998 – 31.8.2001) wurden neben den zuvor erwähnten Aktivitäten noch folgende Einzelvorträge gehalten bzw. Forschungsaufenthalte durchgeführt:

- 16.11.1998, Prof. Dr. Manfred Lücke, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, "Periodenwachstum in Einerschritten bei Oszillationen von Konvektionsmustern – Ein neues Bifurkationsszenario"
- 23.–24.11.1998, Christian Bohr, Mathematisches Institut, Universität München, "Der Satz von Donaldson und seine Analogie in der Kählergeometrie"
- 23.–24.11.1998, Matthias Hoster, Mathematisches Institut, Universität München, "Pseudoholomorphe Kurven und Seiberg-Witten-Theorie"
- 23.–24.11.1998, Prof. Dr. Uwe Semmelmann, Math. Institut, Universität München, "Komplexität von reell algebraischen Mengen"
- 23.–24.11.1998, Prof. Dr. Dieter Kotschick, Mathematisches Institut, Universität München, "Analysis auf symplektischen und Kähler Mannigfaltigkeiten"
- 10.12.1998, Dr. Annalisa Buffa, Univ. Pavia, "Definition of a 3D mortar method for Nédélec' elements"
- 18.–19.01.1999, Privatdozent Dr. Holger Kantz, Max-Planck-Institut für Physik Komplexer Systeme, Universität Dresden, "Dynamische Systeme vom Langevin-Typ: Wo bleibt der Determinismus"

- 17. 01.–28. 02. 1999, Prof. Dr. Alexander Koshelev, St. Petersburg University, Russland, “Non-linear Elliptic and Parabolic Systems of PDEs”
- 25. 01. 1999, Dr. Michael Kuhn, Universität Linz, “Numerical and symbolic scientific computing”
- 06.–09. 02. 1999, Prof. Dr. Christian Van den Broeck, Limburgs Universitair Centrum, Diepenbeek, Belgium “Coupled parametric oscillators”
- 09. 02. 1999, Dr. J. Lorenz, Universität Erlangen-Nürnberg, “Dreidimensionale Prozesssimulation”
- 22. 02. 1999, Prof. Dr. Rüdiger Verfürth, Ruhr-Universität Bochum, “Robuste a posteriori Fehlerschätzer”
- 22. 02. 1999, Frieder Kalisch, Institut für Theor. Physik, Universität Heidelberg, “Flussgleichungen für ds Spin-Boson-Modell im Ohmschen Bad”
- 16. 03. 1999, Dr. Volker Schulz, WIAS Berlin, “Partiell reduzierte SQP-Methoden für strukturierte Optimierungsprobleme”
- 12.–15. 05. 1999, Prof. Dr. Robert Gilmore, Dept. of Physics, Drexel University, Philadelphia, USA, “A program for dynamical systems”
- 17. 05. 1999, Prof. Dr. K. Hutter, Institut für Mechanik, Technische Universität Darmstadt, “Coupled parametric oscillators”
- 11. 06. 1999, Dr. Alexander Padiy, University of Nijmegen, “Generalized augmented matrix preconditioning approach and its application to the iterative solution of ill-conditioned algebraic systems”
- 14.–16. 06. 1999, Prof. Dr. Patrick Eberlein, Dept. of Mathematics, University of North Carolina, Chapel Hill, USA, “Geometry of 2-step nilmanifolds arising from representations of compact Lie groups”
- 28. 06. 1999, Prof. Dr. Max Gunzburger, Iowa State University, “Analysis and computation of Ginzburg-Landau models for superconductivity”
- 06.–09. 07. 1999, Prof. Dr. W. Tuschmann, Max-Planck-Institut Leipzig, “Collapsing and asymptotic flatness”
- 06.–09. 07. 1999, Prof. Dr. A. Petrunin, Max-Planck-Institut Leipzig, “Variational problems for generalized manifolds and collapse”
- 07.–08. 07. 1999, Priv. Doz. Dr. L. Schwachhöfer, Max-Planck-Institut Leipzig, “Symplectic holonomies on homogeneous manifolds”
- 07.–08. 07. 1999, Prof. Dr. Viktor Schroeder, Math. Institut in Zürich, “Lipschitz maps into Hadaard spaces”
- 07.–09. 07. 1999, Prof. Dr. Uwe Abresch, Fakultät für Mathematik, Universität Bochum, “Homogeneous spaces of positive curvature”
- 07.–09. 07. 1999, Prof. Dr. Gerhard Knieper, Fakultät für Mathematik, Universität Bochum, “Geometry and dynamics on Riemannian manifolds of non-positive curvature”
- 07.–09. 07. 1999, Prof. Dr. N. Katz, Math. Institut, Universität Bonn, “Minimizing volume with a lower bound on the distance”
- 07.–09. 07. 1999, Prof. Dr. E. Kuwert, Mathematisches Institut, Universität Freiburg, “Gradient flow for Willmore’s functional”
- 12.–14. 07. 1999, Prof. Dr. Ursula Hamenstädt, Math. Institut, Universität Bonn, “Symplectic capacities for topological balls in R^{2n} ”

- 12.07.1999, Prof. Dr. Thomas Bartsch, Math. Institut, Universität Giessen, “Variational methods on partially ordered Hilbert spaces”
- 13.07.1999, Prof. Dr. Fernando Reitich, University of Minnesota, Minneapolis, “Estimation of the overall magnetic response of magnetorheological fluids”
- 13.–15.07.1999, Prof. Dr. Christian Bär, Math. Institut, Universität Freiburg, “Dirac operators on hyperbolic manifolds”
- 14.–15.07.1999, Prof. Dr. Bernhard Leeb, Math. Institut, Universität Tübingen, “Non-positiv curvature”
- 15.–16.07.1999, Prof. Dr. Ulrich Bunke, Math. Institut, Universität Göttingen, “Scattering theory and geometrically finite groups”
- 15.07.1999, Prof. Dr. Uwe Semmelmann, Math. Institut, Universität München, “Scalar curvature estimates, extremal metrics and rigidity”
- 15.07.1999, Prof. Dr. M. Rost, Fachbereich Mathematik, Universität Regensburg, “Characteristic numbers and norm varieties”
- 19.07.1999, Prof. Dr. Nedyu Popivanov, Dept. of Mathematics and Informatics, University of Sofia, Bulgarien, “A Phenomenon for the Wave Equations”
- 19.–23.07.1999, Prof. Dr. N. Katz, Math. Institut, Universität Bonn, “Kompaktifizierung von Modulräumen”
- 29.07.1999, Prof. Dr. Yan Weiping, Dept. of Mathematics, Shanxi University, China, “Periodicity on Difference Equations Expressed by Maximum Functions”
- 10.08.1999, Prof. Dr. Igor Brigadnov, Univ. St. Petersburg, “Estimation of puncture conditions for dielectrics in nonhomogeneous electrical fields”
- 22.–31.08.1999, Prof. Dr. C. Olmos, Dept. of Mathematics, Universidad Nac. Cordoba, Argentina, “Transitivity of Lorentzian holonomy”
- 14.09.1999, Prof. Dr. Makiko Tanaka, Dept. of Mathematics, University of Tokyo, Japan, “Symmetric R-spaces in the category of symmetric spaces”
- 12.10.1999, Prof. Dr. Yan Weiping, Dept. of Mathematics, Shanxi University, China, “Some new results on difference equations”
- 19.–21.10.1999, Priv. Doz. Dr. Christof Schuette, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik, Berlin, “Biomolekulare Konformationen als metastabile Objekte” und “Übergangoperator und assoziierte Markov-Kette” und “Der steinige Weg von der Theorie zum Algorithmus”
- 23.11.1999, Dr. Boris Khoromskij, MPI Leipzig, “H-matrix approximation in FEM and BEM applications”
- 24.–26.11.1999, Prof. Dr. V. Marenich, Universität Campinas, Brasilien, “Riemannian submersions flat at infinity”
- 29.11.1999, Prof. Dr. Frank Steiner, Universität Ulm, “Universalität im Quantenchaos”
- 18.–21.01.2000, Prof. Dr. W. Tuschmann, Max-Planck-Institut Leipzig, “Alexandrov- und Konvergenzmethoden in der globalen Riemannschen Geometrie I” und “Alexandrov- und Konvergenzmethoden in der globalen Riemannschen Geometrie II”
- 07.02.2000, Prof. Dr. Arkadi Pikovski, Universität Potsdam, “Synchronisation chaotischer Systeme: Statistik vs Dynamik”
- 25.02.2000, Dr. Christian Wieners, Universität Heidelberg, “Theorie und Numerik der Prandtl-Reuss Plastizität”

- 28.02.2000, Dipl.-Math. Michael Gutfleisch, Augsburg, “Stratifizierte Räume und Quotienten in Analysis, Geometrie und Physik”
- 24.03.2000, Prof. Dr. Masahiro Yamamoto, University of Tokyo, “Simultaneous reconstruction of initial temperature and heat radiative coefficient”
- 04.–10.05.2000, Prof. Dr. George Sell, Dept. of Math., University of Minnesota, USA, “The Search for El Nino: Recent developments in the dynamics of infinite dimensional systems”
- 24.04.–08.05.2000, Prof. Dr. Erik Van Vleck, Colorado School of Mines, Colorado, USA, “Analysis and Computation of Traveling Waves Solutions of Bistable Differential-Difference Equations”
- 07.–11.05.2000, Prof. Dr. Peter Talkner, Paul Scherrer Institut, Villingen, Schweiz, “Stochastic resonance in the semi-adiabatic limit”
- 15.–16.05.2000, Dipl.-Math. Marianne Leitner, Fachrichtung Geometrie, Universität Leipzig, “Yang-Mills Gleichungen auf Riemannschen Flächen”
- 16.–17.05.2000, Prof. Dr. Messoud Efendiev, z.Zt. Freie Universität Berlin, “Attractors of Cahn-Hilliard equations with strong nonlinearities”
- 17.–18.05.2000, Priv.-Doz. Dr. Igor Sokolov, Universität Freiburg, “Thermodynamik und Gleichrichtung”
- 30.05.2000, Prof. Dr. Dietrich Braess, Ruhr-Universität Bochum, “Kaskadische Mehrgitterverfahren für Mortar Elemente bei Überlappung”
- 29.–30.06.2000, Dr. Janko Latschev, Max-Planck-Institut Bonn, “Der Vietoris-Rips-Komplex Riemannscher Mannigfaltigkeiten”
- 10.–16.07.2000, Prof. Dr. Julio Lopez-Fenner, Universidad de la Frontera, Temuco, Chile, “Shadowing and Hartman-Grobman in LP-Hyperbolic Difference Equations”
- 10.07.2000, Priv.-Doz. Dr. Stefan Luding, Universität Stuttgart, “Zur statistischen Physik von Harte-Kugel Gasen und granularen Medien; Musterbildung, Brückenbildung und Spinordnung”
- 14.–15.07.2000, Prof. Dr. Paul Ehrlich, Dept. of Math. University of Florida, USA, “Curvature rigidity and timelike geodesic incompleteness in global space-time geometry”
- 15.–23.07.2000, Prof. Dr. T.J. Healey, Cornell University, USA, “Curvature rigidity and timelike geodesic incompleteness in global space-time geometry”
- 19.–21.07.2000, Prof. Dr. Guido Schneider, Universität Bayreuth, “Die Ginzburg-Landau-Gleichung als Attraktor”
- 26.07.2000, Prof. Dr. Yuri Kuznetsov, University of Houston, “Domain decomposition, fictitious domains, and distributed Lagrangian multipliers”
- 22.09.2000, Dr. Christoph Böhm, Universität Kiel, “Das Skalarkrümmungsfunktional auf homogenen Räumen”
- 16.10.2000, Prof. Dr. Olof B. Widlund, Courant Institute, “Theory for FETI-TP methods”
- 23.10.2000, Dr. Christof Krülle, Institut für Experimentalphysik, Universität Bayreuth, “Sandrippel im Labor”
- 14.11.2000, Dr. Michael Hintermüller, Universität Graz, “Über eine primal-duale Strategie zur effizienten numerischen Behandlung von Ungleichungsnebenbedingungen in Optimierungsproblemen”
- 19.–21.11.2000, Dr. Hans Jakob Rivertz, Dept. of Mathematics, University of Oslo, Norwegen “Isometric immersions and representation theory”

- 05. 12. 2000, Dr. Guido Kanschat, Universität Heidelberg, “Unstetige Galerkin-Verfahren für elliptische Probleme”
- 07. 12. 2000, Dr. Ralf Hiptmair, Universität Tübingen, “Multigrid computation of Maxwell eigenvalues”
- 08. 12. 2000, Prof. Dr. Alexander Bobenko, Technische Universität Berlin, “Circle Patterns and integrable systems”
- 15. 12. 2000, Dipl.-Math. Anna Wienhard, Universität Bonn, “Über die Starrheit des Spektrums auf Flächen”
- 18.–19. 12. 2000, Dipl.-Math. Ulrich Weikard, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Bonn, “Finite Element Approximation der Cahn-Hilliard Gleichung”
- 08.–09. 01. 2001, Prof. Dr. Carsten Carstensen, Mathematisches Seminar, Universität Kiel, “An Introduction to a Posteriori Finite Element Error Control and a Proof of the Reliability of the ZZ Error Estimator”
- 16. 01. 2001, Dr. Frank Ihlenburg, ISKO-engineers, “Finite-Elemente Analyse von externen Helmholtz-Problemen: Fehlerabschätzungen und Anwendung auf akustische Streuprobleme”
- 22.–23. 01. 2001, Priv.-Doz. Dr. G. Wirsching, Universität Eichstätt, “Vorgängermengen und Selbstähnlichkeit in der Dynamik der $3n+1$ Funktion”
- 29.–31. 01. 2001, Dr. G. Ochs, Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen, “Zufällige Attraktoren: Theorie und Numerik”
- 01. 02. 2001, Prof. Dr. Stefan Funken, Ludwig-Maximilians-Universität München, “Remarks on the coupling of non-conform FEM and BEM for the Stokes problem”
- 07. 03. 2001, Dr. Volker Schulz, WIAS Berlin, “Parameter estimation and geometrical optimal design for Bingham measurement devices”
- 26. 03. 2001, Dipl.-Math. Nguyen Chanh Dinh, Universität Tübingen, “Motion of level sets with speed depending on mean curvature”
- 18. 04. 2001, Dr. Francesca Rapetti, ASCI-CNRS, Paris, “Mortar edge element methods in electromagnetic field computation”
- 20. 04.–17. 07. 2001, M. Sc. Kalai Kumar Rajagopal, Inst. of Math. Sciences, University Malaya, Kuala Lumpur, “Hartree-Fock-Bogoliubov treatment on Bose-Einstein Condensation”
- 30. 04.–09. 08. 2001, Prof. Dr. Julio Lopez-Fenner, Universidad de la Frontera, Temuco, Chile, Forschungsaufenthalt
- 10. 05. 2001, Dr. Hamid Elhor, Technische Universität Chemnitz, “Lattice dynamics in quasicrystals”
- 15.–17. 05. 2001, Priv.-Doz. Dr. Norbert Koksich, Institut für Analysis, Technische Universität Dresden, “Inertiale Mannigfaltigkeiten für Evolutionsgleichungen und nichtautonome dynamische Systeme”
- 16.–22. 05. 2001, Prof. Dr. Manuel Morillo, Universidad de Sevilla, Spanien, Forschungsaufenthalt
- 30. 05.–01. 06. 2001, Dr. Charles Boubel, Université Henri Poincaré, Nancy, Frankreich, “Local Holonomy in Pseudo-Riemannian Geometry: A First Investigation”
- 12. 06. 2001, Dr. Silvia Bertoluzza, Univ. Pavia, “Nonconforming Three-Fields-Methods”
- 09. 07. 2001, Borja Jimenez de Cisneros, Universidad Complutense de Madrid, Spanien, “What can thermodynamics teach us about the adiabatic piston problem?”

- 04.–10.07.2001, Dr. Nitu Kitchloo, John Hopkins University, Baltimore, USA, “Topology of Kac-Moody Groups”
- 09.–10.07.2001, Dr. Jan Andres, Palacky University, Olomouc, Tschechien, “Multivalued Iterated Function Systems and their Attractors”
- 12.07.2001, Dr. Bernd Simeon, Universität Karlsruhe, “Ineleastische Deformation metallischer Strukturen”
- 28.07.–06.08.2001, Prof. Dr. Gerasimos Ladas, University of Rhode Island, USA, “Open Problem and Conjectures in Difference Equations”
- 29.07.–02.08.2001, Prof. Dr. Hassan Sedaghat, Virginia Commonwealth University, Richmond, USA, “Thresholds, Mode Switching and Complex Dynamics”

8 Zwischenbilanz

Wie jede Bilanz enthält auch diese Zwischenbilanz objektive Fakten einerseits und subjektive Einschätzungen andererseits.

Beginnend mit den objektivsten aller Fakten, nämlich Zahlen, stellen wir zunächst fest, daß im dreijährigen Berichtszeitraum (1.9.1998 – 31.8.2001) in unserem Graduiertenkolleg 18 Promotionen abgeschlossen wurden (davon 12 von Stipendiaten), und daß von Angehörigen unseres Kollegs in diesem Dreijahreszeitraum mehr als 200 mit dem Kolleg in Zusammenhang stehende Publikationen fertiggestellt wurden (mehr als 140 bereits erschienen, 40 zur Publikation angenommen und 20 eingereicht). Die erfolgreiche Arbeit der am Kolleg beteiligten Wissenschaftler findet nicht zuletzt ihren Niederschlag in den an sie ergangenen Rufe (C 3 an Priv.-Doz. Stanislaus Maier-Paape, C 4 an Priv.-Doz. Barbara Wohlmuth, Priv.-Doz. Jens Heber und die Profs. Joachim Bungartz und Ronald H. W. Hoppe) sowie die Verleihung eines Emmy Noether-Stipendiums an den Kollegiaten Stefan Siegmund.

Da aber Zahlen der genannten Art alleine wenig aussagen, wollen wir einige Fakten näher erläutern und interpretieren. Wir betonen dabei – da wir ein interdisziplinäres Graduiertenkolleg sind – vor allem die Kooperationen zwischen den 2 physikalischen und den 5 mathematischen Arbeitsgruppen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit beschränken wir uns an dieser Stelle im wesentlichen auf die *Aufzählung* der erfolgten Aktivitäten und verweisen hinsichtlich *inhaltlicher Einzelheiten* auf die ausführlichen Darstellungen der einzelnen Arbeitsgruppen im Arbeits- und Ergebnisbericht (Teil B) und die Einzelberichte der Stipendiaten und Kollegiaten im Teil C dieses Antrags. Gleiches gilt für die innermathematischen und die innerphysikalischen Kooperationen.

Die physikalische Arbeitsgruppe 4 (Nichtlineare Physik komplexer Systeme, Hänggi/Linz) kooperiert nach wie vor intensiv mit den mathematischen Arbeitsgruppen 1, 2 und 3. Die Zusammenarbeit mit den Arbeitsgruppen 1 (Nichtlineare Analysis, Kielhöfer/Maier-Paape) und 3 (Numerische Lösung gekoppelter Systeme partieller Differentialgleichungen, Hoppe) dokumentiert sich in den Dissertationen der Mathematiker/innen Dirk Blömker, Christoph Gugg, Eva Nash und dem Physiker Martin Raible sowie einem von diesen gemeinsam veranstalteten Seminar. Diese vier Dissertationen sind insofern eng miteinander verknüpft, als sie partielle Differentialgleichungen vom Evolutionstyp mit (außer bei Frau Nash) additivem weißen Rauschen behandeln, und in jeder dieser Arbeiten sowohl analytische als auch numerische und physikalische Aspekte (natürlich mit unterschiedlicher Gewichtung) eine Rolle spielen. Zu erwähnen ist in diesem Zusammenhang auch die von Blömker, Gugg und Raible gemeinsam verfasste Publikation “Thin-film-growth-models: Roughness and correlation functions”.

Die mit der Arbeitsgruppe 2 (Dynamik und Kontrolle gewöhnlicher Differentialgleichungen, Aulbach/Colonius) bestehende Zusammenarbeit verläuft auf mehreren Ebenen und hat bereits zu drei gemeinsam betreuten und begutachteten Doktorarbeiten geführt. In der Dissertation von Ralf Eichhorn (Gutachter: Linz/Aulbach) geht es um die Identifizierung und Klassifizierung einfacher chaotischer Systeme, was insbesondere die Problematik der aus mathematischer und physikalischer Sicht zuweilen unterschiedlichen Chaosbegriffe mit sich bringt. Die Doktorarbeit von Lars Callenbach (Gutachter: Hänggi/Colonius) hat die Synchronisation von dynamischen Systemen zum Thema, bei der auch kontrolltheoretische Methoden zum Einsatz kommen. In der Dissertation von Bernd Reinhard (Gutachter: Linz/Aulbach, geplant) geht es um das physikalische Problem von Ionenfallen, bei deren Analyse mathematisch subtile Fragen zu nichtautonomen Differentialgleichungen auftreten.

Die physikalische Arbeitsgruppe 6 (Stark korrelierte Vielteilchensysteme, Eckern/Ziegler) hat mittlerweile Kooperationen mit den mathematischen Arbeitsgruppen 1, 2, 5, und 7 aufgebaut. Die schon seit längerem bestehende Zusammenarbeit mit den Arbeitsgruppen 5 (Globale Differentialgeometrie, Eschenburg/Heintze) und 7 (Geometrische Analysis, Lohkamp) hat zu dem Workshop “Anwendungen des Atiyah-Singer-Index-Theorems in der theoretischen Physik” geführt, das den Quanten-Hall-Effekt und seine möglichen topologischen, insbesondere indextheoretischen, Erklärungen zum Thema hatte (siehe den ausführlichen Bericht hierzu auf den Seiten 103 bis 107). Zu diesem Themenbereich gehört auch das Promotionsprojekt von Frau Leitner, das gemeinsam von den Professoren Heintze und Ziegler betreut wird.

Die Zusammenarbeit mit der Arbeitsgruppe 5 (Eschenburg/Heintze) konnte auch im Zusammenhang mit der Promotion von Andreas Osterloh intensiviert werden. Insbesondere hat Prof. Eschenburg das Zweitgutachten zu dieser Dissertation verfasst und in seinem Gutachten darauf hingewiesen, daß es (frei zitiert) “sehr beeindruckend ist, wie hier mit Symmetrieargumenten ein zunächst völlig hoffnungslos scheinendes Eigenwertproblem nach mehreren Transformationen vollständig gelöst wird”, wobei “an entscheidenden Stellen Ideen eingehen, die aus der physikalischen Interpretation des Modells stammen”. Angeregt durch diese Untersuchungen sind Fragestellungen präzisiert worden, die für beide Seiten – Mathematik und Physik – von großem Interesse sind. Weitere intensive Diskussionen über mögliche Verallgemeinerungen der Harish-Chandra-Formel und technische Aspekte der Anwendung gruppentheoretischer Konzepte wurden von Dr. Braak und Prof. Eschenburg geführt.

Im Zusammenhang mit ungeordneten Systemen in einer Dimension hat sich eine Kooperation mit der Arbeitsgruppe 2 (Aulbach/Colonius) entwickelt, die ein beträchtliches Potential für eine künftige Zusammenarbeit bietet. Hier liegt die Idee zu Grunde, die zu einem ungeordneten System gehörige Greensche Funktion als Pfadintegral bzgl. eines Superfeldes (Fermion + Boson) darzustellen und daraus einen null-dimensionalen Hamilton-Operator zu extrahieren. Für diesen kann dann eine diskrete Schrödinger-Gleichung angegeben werden, die wegen verschiedener in ihr auftretender Entartungen mit Standardmethoden zwar nicht gelöst, durch die Weiterentwicklung spezieller Differenzgleichungstechniken aber einer Lösung nähergebracht werden kann. Erste Erfolge in dieser Hinsicht konnten von Prof. Aulbach in Zusammenarbeit mit Prof. Elaydi (Trinity University, San Antonio/Texas, USA) erzielt und in der von Aulbach, Elaydi und Ziegler gemeinsam verfassten Arbeit “Nonstandard difference equations techniques applied to quantum mechanics on a disordered chain” niedergeschrieben werden.

Neue Kooperationsmöglichkeiten haben sich während der diesjährigen Klausurtagung auf der Reissburg (Mai 2001) mit der Arbeitsgruppe 1 (Kielhöfer/Maier-Paape) ergeben. Die in dieser Arbeitsgruppe untersuchten statischen, räumlich zwei-dimensionalen Modelle (von einem verallgemeinerten Ginzburg-Landau-Typ) für martensitische Systeme haben, nach (in der Sprache der Physik) Integration über die auf einem Halbraum definierten “freien” Variablen, eine große Ähnlichkeit mit den effektiven Modellen für dissipative Quanten-Systeme. Daher tritt in beiden Fällen ein (nur) algebraisch zerfallender Beitrag in der effektiven Wirkung bzw. in der entspre-

chenden klassischen Bewegungsgleichung auf. Es ist geplant, die in der Arbeitsgruppe 6 (und auch in der zweiten physikalischen Arbeitsgruppe 4) bestehenden umfangreichen Erfahrungen zur dissipativen Quantenmechanik in die Untersuchungen der martensitischen Systeme einfließen zu lassen.

Die Interaktionen der physikalischen mit den mathematischen Arbeitsgruppen zusammenfassend kann man feststellen, daß sich im Berichtszeitraum zahlreiche Kooperationen ergeben bzw. weiterentwickelt haben, und daß alle Beteiligten davon überzeugt sind, daß sich in der beantragten dritten Förderperiode des Graduiertenkollegs weitere konkrete Ergebnisse erzielen und sowohl mathematische als auch physikalische Einsichten gewinnen lassen, die nur im Rahmen einer interdisziplinären Kooperation möglich sind.

Bezüglich weiterer Kooperationen, insbesondere innermathematischer und innerphysikalischer, verweisen wir auf die insgesamt 14 Abschnitte mit dem Titel "Stellung im Graduiertenkolleg", die in den Berichten der einzelnen Arbeitsgruppen (im Teil A und im Teil B) zu finden sind.

Neben den Auswirkungen des Graduiertenkollegs auf sich selbst und auf die inneruniversitäre Struktur verdient auch die Wechselwirkung mit der "Außenwelt" Erwähnung. Nicht zuletzt dem Graduiertenkolleg ist es zu verdanken, daß die Augsburger Aktivitäten im Bereich der "Nichtlinearen Probleme in Analysis, Geometrie und Physik" in der nationalen und internationalen Forschungslandschaft in zunehmendem Maße wahrgenommen werden. Umgekehrt erhält die Augsburger Gruppe im Rahmen des umfangreichen Gastwissenschaftlerprogramms die Möglichkeit, auswärtige Kompetenz in einem Maße nach Augsburg zu holen, das weit über die sonstigen Möglichkeiten hinausgeht. Nicht zu unterschätzen sind schließlich die neuen Impulse, die der von auswärtigen Universitäten ins Graduiertenkolleg aufgenommene wissenschaftliche Nachwuchs mit sich bringt.

Zusammenfassend stellen wir fest, daß unser seit fünf Jahren bestehendes Graduiertenkolleg nachweislich zu einer Intensivierung und Verbesserung der fachübergreifenden Ausbildungs- und Forschungsaktivitäten geführt hat, und daß dadurch die Förderung des wissenschaftlichen Nachwuchses im angestrebten Maße gelungen ist. Aus Sicht aller Beteiligten fällt daher die Bilanz über die bisher geleistete Arbeit sehr positiv aus, und es besteht die Absicht, das Graduiertenkolleg auch in der dritten Förderperiode – von kleinen Änderungen abgesehen – in der bisherigen Form weiterzuführen.